

# 強震記録の処理に関する一考察 その(1)

木下 繁 夫\*

国立防災科学技術センター第2 研究部

## On a Method for Processing of the Strong-motion Earthquake Accelerogram (I)

By

Shigeo Kinoshita

*Earthquake Engineering Laboratory, Second Research Division  
National Research Center for Disaster Prevention, No. 4489-1,  
Kurihara, Sakura-mura, Nihari-gun, Ibaraki-ken, 300-32*

### Abstract

This report deals with a method for representing the characteristics of the strong-motion earthquake accelerogram by using a small number of parameters, and its applications. This method is based on both the prediction error filter and the autoregressive spectrum estimation method, assuming such a recorded acceleration is a sample function from a second order, covariance stationary stochastic process. Parameters which this method requires are obtained by a following procedure:

- 1) The digitized acceleration is obtained by sampling a recorded wave with a uniform interval.
- 2) The linear prediction method is applied in the dominant duration of the digitized data, and this data is expanded by the uncorrelated random variables.
- 3) The covariance matrix of the prediction error and the matrices of this expansion become required parameters.

There are two basic schemes to apply these parameters. One is the application in the time domain. For this purpose, the prediction error filter which is constructed directly by these parameters, is used. This filter is driven by uniform random numbers between zero and one, to generate artificial earthquake acceleration waves with the same spectral density matrix representing an original earthquake acceleration record. On the other hand, in order to apply these parameters in the frequency domain, matrices whose elements are autoregressive-coefficients are computed from these parameters and are used to estimate the spectral density matrix.

In one dimensional case, various applications are considered. In particular, the concept of virtual ground layers, the identification of a multi-degree-of-freedom system and the calculation of quasi-response spectrum are important. Parameters,

---

\* 耐震実験室

which are coefficients of an expansion by uncorrelated random variables, are equivalent to reflection coefficients in a mathematical multi-reflection scheme, i.e. virtual ground layers. Supposing that this scheme is regarded as a system which is constructed by random variables, it is possible that the system is used to estimate ground acceleration waves which are predicted at each site. The equivalent multi-degree-of-freedom system is estimated by solving the characteristic equation which appears in the denominator of the spectral density function. Artificial acceleration waves which are generated by the prediction error filter are used to make out the quasi-response spectrum.

## まえがき

ボーリング資料や PS 検層資料に基づいて、種々の数値計算から得られる地震動はいわゆる“あるべき”地震動である。これに対して、強震計記録は実際に“あった”地震動である。しかしながら、前者の各資料は利用され易い形で蓄積されているのに比較して、強震計記録は大地震以外ほとんど整理されていない。中小地震においてはその記録紙が残されているだけのものが大部分である。

そこで、この報告では強震計記録をパラメータ化し、さらにこれらから原強震計記録の特徴を引き出す一方法について考察する。これが可能となれば、強震計記録はその特徴を表わす少数パラメータを数値化されたデータの代りに保存すれば良いことになり、特に中小地震の処理に有効である。もちろん、大地震における強震計記録の数値化されたデータは欠くことが出来ないが、強震計記録の今後の増加を考えると、このような処理法が遠からず必要となるであろう。

本報告では、なるべく簡単に強震計記録の特徴を把握することを目的として、記録の主要動部のみを部分的に定常と仮定して扱う。すなわち、強震計記録の特徴を時間領域及び周波数領域において耐震工学的に応用出来るようにパラメータ表現することを目的とする。

時間領域における取扱いにおいて、強震計記録のパラメータ化はこの方法の最大の特徴を示す。すなわち、従来の人工地震波発生法は、記録波形のもつ連続スペクトルを線スペクトルの和で近似する三角関数系による展開法がほとんどである。したがって、展開項数はかなり多くなる。これに対して、連続スペクトル構造をもつ予測誤差フィルタをパラメータから構成して、直接利用する本方法ははるかに少い展開項数で人工地震波を発生出来る。さらに、一次元から相関のある三次元人工地震波までを系統的かつ容易に実現出来る。

## 1. 強震計記録のパラメータ表現

ここでは強震計記録を三次元記録と見なして、その主要動部をパラメータ表現する。また、これらのパラメータを使い、時間及び周波数領域において原記録の特徴を再現する一方法を考察する。

### 1.1 パラメータ表現

強震計記録の主要動部を標本化時間  $\Delta T$  で標本化したベクトル時系列を  $\{\mathbf{x}(n \cdot \Delta T), n=1, 2, \dots, N\}$  とする. ベクトルまたは行列の転置をプライム記号で表示すれば

$$\mathbf{x}'(n \cdot \Delta T) = [x_1(n \cdot \Delta T), x_2(n \cdot \Delta T), x_3(n \cdot \Delta T)] \quad (1)$$

であり, 対応するベクトル値確率変数は

$$\mathbf{X}'(n) = [X_1(n), X_2(n), X_3(n)] \quad (2)$$

で表示される. 以後の数学的取扱いを容易にするために, このベクトル値確率変数列に対していくつかの仮定を設ける. すなわち,  $j, k=1, 2, 3; m, n=1, 2, \dots, N$  に対して次の三条件を要請する.

- (a)  $E[X_j(n)] = 0$
- (b)  $E[X_j^2(n)] < \infty$
- (c)  $E[\mathbf{X}(m) \cdot \mathbf{X}'(n)] = \mathbf{R}(m-n)$

ここで,  $\mathbf{R}(m-n)$  は共分散行列であり,  $E[\mathbf{X}]$  は確率変数  $\mathbf{X}$  の期待値とする. (a), (b) は平均零の二次過程を, (c) は共分散定常をそれぞれ仮定している.

強震計記録を予測表現するために, 部分空間  $\mathbf{M}_l \equiv \{\mathbf{X}(k-n), n=1, 2, \dots, l\}$  による  $\mathbf{X}(k)$  及び  $\mathbf{X}(k-(l+1))$  の前向き及び後向き線形予測

$$\hat{\mathbf{X}}(k|l) = \sum_{n=1}^l \mathbf{F}(l, n) \cdot \mathbf{X}(k-n) \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(k-(l+1)|l) = \sum_{n=1}^l \mathbf{B}(l, n) \cdot \mathbf{X}(k-n) \quad (4)$$

を考える. 予測行列  $\{\mathbf{F}(l, n), \mathbf{B}(l, n), n=1, 2, \dots, l\}$  は (3), (4) 式の予測誤差を各々と

$$\tilde{\mathbf{X}}(k|l) = \mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}(k|l) \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}(k-(l+1)|l) = \mathbf{X}(k-(l+1)) - \hat{\mathbf{X}}(k-(l+1)|l) \quad (6)$$

すれば, 下記の前向き及び後向き Yule-Walker の方程式の解である.

$$E[\tilde{\mathbf{X}}(k|l) \cdot \mathbf{X}'(k-n)] = \mathbf{R}(n) - \sum_{m=1}^l \mathbf{F}(l, m) \cdot \mathbf{R}(n-m) = \mathbf{O}, \quad n=1, 2, \dots, l. \quad (7)$$

$$E[\tilde{\mathbf{X}}(k-(l+1)|l) \cdot \mathbf{X}'(k-n)] = \mathbf{R}(n-(l+1)) - \sum_{m=1}^l \mathbf{B}(l, m) \cdot \mathbf{R}(n-m) = \mathbf{O}, \quad n=1, 2, \dots, l. \quad (8)$$

ここで,  $\mathbf{O}$  は三行三列の零行列とする. また, 前向き予測誤差の共分散行列は

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(l) &= E[\tilde{\mathbf{X}}(k|l) \cdot \tilde{\mathbf{X}}'(k|l)] \\ &= E[(\mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}(k|l)) \cdot \mathbf{X}'(k)] = \mathbf{R}(\mathbf{O}) - \sum_{m=1}^l \mathbf{F}(l, m) \cdot \mathbf{R}(-m) \end{aligned} \quad (9)$$

となる. また,  $\mathbf{M}_l$  と  $\mathbf{M}_{l+1} \equiv \{\mathbf{X}(k-n), n=1, 2, \dots, l+1\}$  において, Yule-Walker の方程式から次の漸化式が得られる (P. Whittle, 1963).

$$\mathbf{F}(l+1, n) = \mathbf{F}(l, n) - \mathbf{F}(l+1, l+1) \cdot \mathbf{B}(l, n), \quad n=1, 2, \dots, l. \quad (10)$$

$$\mathbf{B}(l+1, n+1) = \mathbf{B}(l, n) - \mathbf{B}(l+1, 1) \cdot \mathbf{F}(l, n), \quad n=1, 2, \dots, l. \quad (11)$$

この報告においては、強震計記録を工学的に応用するための必要パラメータとして  $\{\mathbf{F}(n, n), \mathbf{B}(n, 1), n=1, 2, \dots, p\}$  及び  $\tilde{\Sigma}(p)$  を選ぶことにする。すなわち、強震計記録主要動部は図1に示すようにフィルタ  $\Phi$  に入力  $\tilde{\mathbf{X}}(k|p)$  を加えたときのフィルタの出力であるとする。ここで、 $\{\mathbf{F}(n, n), \mathbf{B}(n, 1), n=1, 2, \dots, p\}$  がフィルタ  $\Phi$  の特性を、 $\tilde{\Sigma}(p)$  が入力  $\tilde{\mathbf{X}}(k|p)$  の確率的特徴を各々記述している。すなわち、これらのパラメータで強震計記録主要動部の発生過程がモデル化される。

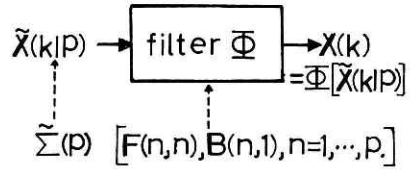


図1 強震波モデル

Fig. 1. A model of the strong-motion acceleration wave

また、このパラメータ抽出の方法では  $n$  を増すごとに  $\mathbf{X}(k)$  のもつスペクトル構造はフィルタ  $\Phi$  に逐次吸収され、最終的にはフィルタ  $\Phi$  は  $\mathbf{X}(k)$  のスペクトル包絡をその特性として持つこととなり、 $\tilde{\mathbf{X}}(k|p)$  は残りのスペクトル微細構造のみをその特性として持つこととなる。すなわち、 $\tilde{\mathbf{X}}(k|p)$  は、その共分散行列  $\tilde{\Sigma}(p)$  とともに三次元白色雑音に漸近してゆく。

## 1.2 時間領域における表現

1.1 で定めたパラメータから、原強震計記録主要動部とスペクトル包絡特性を等しくする時間波形を作るためには、フィルタ  $\Phi$  を具体的に構成せねばならない。

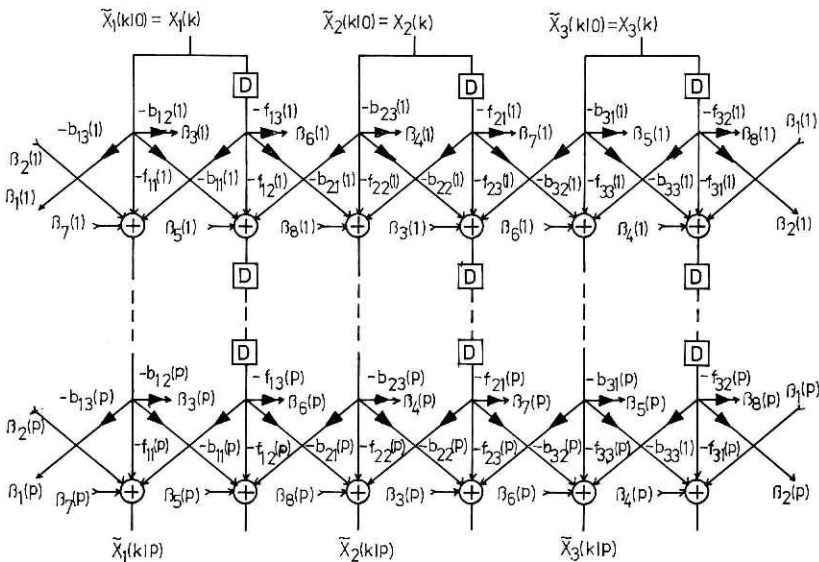


図2 三次元予測誤差フィルタ

Fig. 2 Three dimensional prediction error filter

まず,  $\mathbf{I}$  を三行三列の単位行列として

$$\mathbf{F}(n, 0) = -\mathbf{I}, \mathbf{B}(n, n+1) = -\mathbf{I}, \quad n=1, 2, \dots, p. \quad (12)$$

を定義する. さらに, 遅延作用素  $D$ :

$$D^l \mathbf{X}(n) = \mathbf{X}(n-l), \quad l=0, 1, \dots \quad (13)$$

を定義する. これらにより, (5), (6) 式は各々 (14), (15) 式となる.

$$\tilde{\mathbf{X}}(k|l) = -\sum_{n=0}^l \mathbf{F}(l, n) \cdot D^n \mathbf{X}(k) \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}(k-(l+1)|l) = -\sum_{n=1}^{l+1} \mathbf{B}(l, n) \cdot D^n \mathbf{X}(k) \quad (15)$$

この両式と (10), (11) 式から次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}(k|l+1) &= -\sum_{n=0}^{l+1} \mathbf{F}(l+1, n) \cdot D^n \mathbf{X}(k) \\ &= -\left[ \mathbf{F}(l+1, 0) + \sum_{n=1}^l [\mathbf{F}(l, n) - \mathbf{F}(l+1, l+1)\mathbf{B}(l, n)] \cdot D^n + \mathbf{F}(l+1, l+1) \cdot D^{l+1} \right] \cdot \mathbf{X}(k) \\ &= \tilde{\mathbf{X}}(k|l) - \mathbf{F}(l+1, l+1) \cdot \tilde{\mathbf{X}}(k-(l+1)|l) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}(k-(l+2)|l+1) &= -\sum_{n=1}^{l+2} \mathbf{B}(l+1, n) \cdot D^n \mathbf{X}(k) \\ &= -D \cdot \left[ \mathbf{B}(l+1, 1) - \sum_{n=1}^l [\mathbf{B}(l, n) - \mathbf{B}(l+1, 1) \cdot \mathbf{F}(l, n)] \cdot D^n + D^{l+1} \right] \mathbf{X}(k) \\ &= D[\tilde{\mathbf{X}}(k-(l+1)|l) - \mathbf{B}(l+1, 1) \cdot \tilde{\mathbf{X}}(k|l)] \end{aligned} \quad (17)$$

ここで,  $\tilde{\mathbf{X}}(k|0) = \mathbf{X}(k)$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}(k-1|0) = D\mathbf{X}(k) = \mathbf{X}(k-1)$  とする.

$\mathbf{F}(n, n)$ ,  $\mathbf{B}(n, 1)$  の  $(j, k)$  成分を各々

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}(n, n))_{j,k} &= f_{j,k}(n), \quad (\mathbf{B}(n, 1))_{j,k} = b_{j,k}(n), \quad n=1, 2, \dots, p. \\ & \quad j, k=1, 2, 3. \end{aligned} \quad (18)$$

とすれば, (16), (17) 式よりフィルタ  $\Phi$  は図 2 に示すようになる. このフィルタへの入力  
は三次元の独立な 0-1 間の一様乱数に  $\tilde{\Sigma}(p)$  の各主対角成分の平方根を乗じることにより近  
似的に得られる. すなわち入力列は下式で与えられる.

$$\tilde{\mathbf{X}}_j(n|p) = [(\tilde{\Sigma}(p))_{j,j}]^{1/2} \cdot \eta_j(n), \quad j=1, 2, 3; \quad n=1, 2, \dots \quad (19)$$

$$E[\eta_j(m)] = 0, \quad E[\eta_j(m)\eta_k(n)] = \delta_{jk} \cdot \delta_{mn}, \quad j, k=1, 2, 3; \quad m, n=1, 2, \dots$$

ただし,  $(\tilde{\Sigma}(p))_{j,j}$  は  $\tilde{\Sigma}(p)$  の  $(j, j)$  成分とし,  $\delta_{j,k}$  等はクロネッカーのデルタとする.

また, (16) 式を  $l=0$  から  $p-1$  まで辺々加えることにより下式を得る.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k) &= \tilde{\mathbf{X}}(k|0) \\ &= \sum_{n=1}^p \mathbf{F}(n, n) \cdot \tilde{\mathbf{X}}(k-n|n-1) + \tilde{\mathbf{X}}(k|p) \end{aligned} \quad (20)$$

(20) 式は強震計記録の無相関なベクトル値確率変数列による有限フーリエ展開となる.

### 1.3 周波数領域における表現

周波数領域における表現は  $\{\mathbf{F}(n, n), \mathbf{B}(n, l), n=1, 2, \dots, p\}$  から回帰行列  $\{\mathbf{F}(p, n), n=1, 2, \dots, p\}$  を求めることに帰着する。これは (10), (11) 式を逐次用いることによって求められる。

そこで、

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{I} - \sum_{n=1}^p \mathbf{F}(p, n) \cdot \exp(-i\lambda n), \quad |\lambda| \leq \pi \quad (21)$$

とすれば、スペクトル密度行列は下式となる (E. Parzen, 1968).

$$\mathbf{P}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{A}^{-1}(\lambda) \cdot \tilde{\Sigma}(p) \cdot [\bar{\mathbf{A}}'(\lambda)]^{-1}, \quad |\lambda| \leq \pi \quad (22)$$

ここで、 $\lambda = 2\pi f \cdot \Delta T$  は基準化角周波数であり、 $\bar{\mathbf{A}}$  は  $\mathbf{A}$  の複素共役とする。

#### 1.4 数値計算における注意

実際の数値計算においては、共分散行列  $\mathbf{R}(n)$  の代りに標本共分散行列

$$\mathbf{C}(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N-n} \mathbf{x}((l+n) \cdot \Delta T) \cdot \mathbf{x}'(l \cdot \Delta T), \quad n=0, 1, \dots, p. \quad (23)$$

を用い、(7), (8), 及び (9) 式を解いて必要なパラメータを求めることになる。ただし、 $\{\mathbf{x}(n \cdot \Delta T), n=1, 2, \dots, N\}$  の加算平均は零ベクトルになっているものとする。

数値計算において決定せねばならないものとして、標本化時間  $\Delta T$  及び項数  $p$  がある。この報告で用いている自己回帰法による推定スペクトル密度行列では項数不足のため近接するスペクトルの山を分離出来ないことがある。近接する山の分離が真に意味を持つものならば、これには注意せねばならない。これを防ぐため、標本スペクトル密度行列  $\mathbf{I}(\lambda)$  の特徴を把握しておく必要がある。 $\mathbf{I}(\lambda)$  は標本フーリエ変換

$$\mathbf{Z}(\lambda) = \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n \cdot \Delta T) \cdot \exp(-i\lambda n), \quad |\lambda| \leq \pi \quad (24)$$

から

$$\mathbf{I}(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \mathbf{Z}(\lambda) \mathbf{Z}'(-\lambda), \quad |\lambda| \leq \pi \quad (25)$$

として求まる。換言すれば、 $\mathbf{I}(\lambda)$  の特徴を目的に沿って表現出来るように  $\Delta T$  と  $p$  を決定せねばならない。

$\Delta T$  は  $\mathbf{I}(\lambda)$  の形状から決定する。すなわち、 $\mathbf{I}(\lambda)$  の形状から耐震工学的に意味を持つと見なせる上限周波数  $f_c(\text{Hz})$  を決定する。しかる後に、 $\Delta T(\text{sec})$  を標本化定理からいくぶん余裕をもたせて  $(0.2 \sim 0.3) \cdot f_c^{-1}$  程度に決定する。標本化の荒さによる折り返し効果は  $\mathbf{I}(\lambda)$  と最終的に推定される  $\mathbf{P}(\lambda)$  との比較からその影響を判断する。ただし、前処理として低域通過フィルタが使えるような場合は別である。

パラメータの項数  $p$  は情報量基準 (AIC) に従って決定する (H. Akaike, 1974).

$$\text{AIC} = -2 \cdot \ln(\text{最大尤度}) + 2 \cdot (\text{パラメータ数})$$

情報量基準とはモデルの将来の値の分布を予測するための基準であり、真の分布の標本分布に関するエントロピーを最大にする (最大の情報量を得る) ためにモデルのパラメータ自由度を決定する方法である。この報告では二次までの統計量を扱っており、等価なガウス過程を想定出来る。したがって、実用的にはガウス分布の最大尤度から下式が求まる (R. H. Jones, 1974)。

$$\text{AIC}(n) = N \cdot \ln(\det(\tilde{\Sigma}(n))) + 2M^2 n \quad (26)$$

ここで、 $M$  は次元の数である。項数  $p$  は (26) 式を最小とする  $n$  とする。

## 2. 一次元の場合

ここまでは強震計の三成分を同時に扱い、予測誤差フィルタによる三次元地震動のシミュレーション法等の結果を得て来た。しかしながら、強震計記録の処理はその一成分のみに注目して行われているのが大部分である。また、実際の応用においても一次元での取扱いでほとんどの場合は間に合っているようである。そこで、以後は一次元の場合について詳論し、この方法の特徴や他の側面からの見方等を明確にする。

一次元の場合の記号はこれまでの太字記号から類推出来ると思われるので、添字記号は省略し、なるべく見易いようにとした。

### 2.1 パラメータの特徴

一次元の場合、1 で求めたパラメータは次のように三つの特徴が見出される。まず、(3), (4) 式に対応する前向き及び後向き予測を各々下式とする。

$$\hat{X}(k|l) = \sum_{n=1}^l f(l, n) \cdot X(k-n) \quad (27)$$

$$\hat{X}(k-(l+1)|l) = \sum_{n=1}^l b(l, n) \cdot X(k-n) \quad (28)$$

各式の予測係数は (7), (8) 式に対応して

$$R(n) = \sum_{m=1}^l f(l, m) \cdot R(n-m), \quad n=1, 2, \dots, l. \quad (29)$$

$$R(n-(l+1)) = \sum_{m=1}^l b(l, m) \cdot R(n-m), \quad n=1, 2, \dots, l. \quad (30)$$

の解である。一次元の場合、共分散関数は偶関数であるから (30) 式は下式となる。

$$R(n) = \sum_{m=1}^l b(l, l-m+1) \cdot R(n-m), \quad n=1, 2, \dots, l. \quad (31)$$

(29) 式との比較により次の関係が得られる。

$$f(l, n) = b(l, l-n+1), \quad n=1, 2, \dots, l. \quad (32)$$

故に、1. で定義したパラメータは一次元の場合には次のような関係を持っている。

$$f(l, l) = b(l, 1) \equiv r(l), \quad l=1, 2, \dots, p. \quad (33)$$

次に、前向き及び後向き予測誤差を (5), (6) 式に対応して

$$\tilde{X}(k|l) = X(k) - \hat{X}(k|l) \quad (34)$$

$$\tilde{X}(k-(l+1)|l) = X(k-(l+1)) - \hat{X}(k-(l+1)|l) \quad (35)$$

とすれば (34), (35) 及び (32) 式より

$$\begin{aligned} \sigma(l) &= E[(\tilde{X}(k|l))^2] \\ &= R(0) - \sum_{n=1}^l f(l, n) \cdot R(n) \\ &= R(0) - \sum_{n=1}^l b(l, n) \cdot R(l-n+1) = E[(\tilde{X}(k-(l+1)|l))^2] \end{aligned} \quad (36)$$

を得る。すなわち、前向き及び後向き予測誤差の自乗平均は等しい。さらに、この二つの予測誤差から次式が得られる。

$$E[\tilde{X}(k|l) \cdot \tilde{X}(k-(l+1)|l)] = R(l+1) - \sum_{n=1}^l f(l, n) \cdot R(l-n+1) \quad (37)$$

最後に、(29), (36) 及び (37) 式を連立させることにより次の漸化式を得る。

$$\begin{aligned} r(l) = f(l, l) &= \frac{R(l) - \sum_{n=1}^{l-1} f(l-1, n) \cdot R(l-n)}{R(0) - \sum_{n=1}^{l-1} f(l-1, n) \cdot R(n)} \\ &= \frac{E[\tilde{X}(k|l-1) \cdot \tilde{X}(k-1|l-1)]}{E[(\tilde{X}(k-1|l-1))^2]}, \quad l=1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (38)$$

$$f(l, n) = f(l-1, n) - f(l, l) \cdot f(l-1, l-n), \quad n=1, 2, \dots, l-1. \quad (39)$$

(39) 式は (10) 式に対応する。また、(38) 式は (36) 式により下式となる。

$$r(l) = \frac{E[\tilde{X}(k|l-1) \cdot \tilde{X}(k-1|l-1)]}{[E[(\tilde{X}(k|l-1))^2] \cdot E[(\tilde{X}(k-1|l-1))^2]]^{1/2}}, \quad l=1, 2, \dots, p \quad (40)$$

ここで、 $\tilde{X}(k|0) = X(k)$ ,  $\tilde{X}(k-1|0) = X(k-1)$  とする。Schwarz の不等式によれば  $|r(l)| \leq 1$  となる。(40) 式は偏相関係数の定義式である。

実際の数値計算においては、 $l > p$  のとき  $E[r^2(l)] \simeq N^{-1}$  で評価される (G. P. Box and G. M. Jenkins, 1970) から、 $N=500 \sim 1,000$  程度では偏相関係数の推定における有効桁はせいぜい三桁程度までである。また、(26) 式は一次元の場合、偏相関係数の性質

$$\sigma(n) = R(0) \cdot \prod_{l=1}^n [1 - r^2(l)] \quad (41)$$

から、定数項を無視して下式となる。

$$AIC(n) = N \sum_{l=1}^n \ln [1 - r^2(l)] + 2n \quad (42)$$

## 2.2 仮想地盤

一次元の場合、パラメータ間には (33) の関係があり、予測誤差フィルタは図3となる。図3からも明らかであるが、(16), (17) 式に対応する関係式を变形することにより次の二式が得られる。



$$\tilde{X}(k|l-1) = \tilde{X}(k|l) + r(l) \cdot \tilde{X}(k-1|l-1) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k-(l+1)|l) &= D \cdot [\tilde{X}(k-1|l-1) - r(l) \cdot \tilde{X}(k|l-1)] \\ &= D \cdot [-r(l) \cdot \tilde{X}(k|l) + (1-r^2(l)) \cdot \tilde{X}(k-1|l-1)] \end{aligned} \quad (44)$$

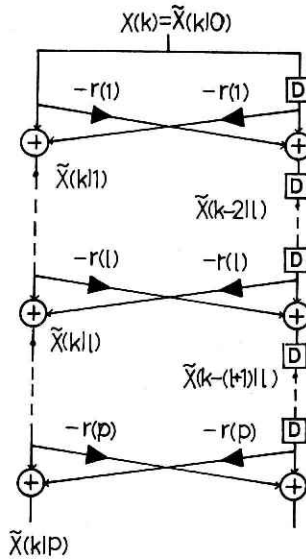


図 3 一次元予測誤差フィルタ

Fig. 3 One dimensional prediction error filter

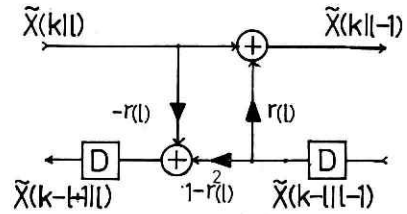


図 4 等価変換

Fig. 4 Equivalent transform

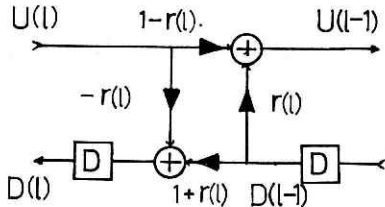


図 5 等価変換

Fig. 5 Equivalent transform

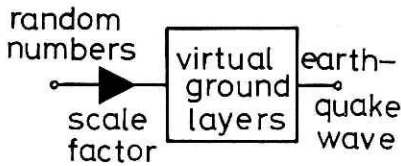


図 7 人工波発生器

Fig. 7 Artificial earthquake acceleration generator

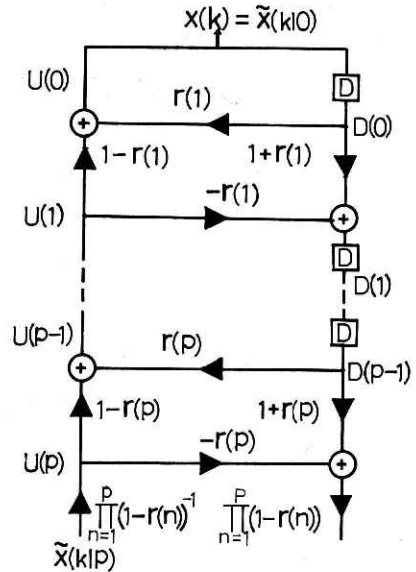


図 6 仮想地盤

Fig. 6 Virtual ground layers

(43), (44) 式は図4のように表わされる。そこで、次の変換を行う。

$$\tilde{X}(k|0) = U(0), \quad \tilde{X}(k-1|0) = D(0)$$

$$\tilde{X}(k|l) = \prod_{n=1}^l (1-r(n)) \cdot U(l), \quad \tilde{X}(k-(l+1)|l) = \prod_{n=1}^l (1-r(n)) \cdot D(l),$$

$$l=1, 2, \dots, p. \quad (45)$$

この変換により (43), (44) 式は各々次のようになる。

$$U(l-1) = (1-r(l)) \cdot U(l) + r(l) \cdot D(l-1) \quad (46)$$

$$D(l) = D \cdot [-r(l) \cdot U(l) + (1+r(l)) \cdot D(l-1)] \quad (47)$$

したがって、図4に対応して図5が得られる。また、図3は最終的に図6となる。

図6は  $U(p)$  を入射波とする  $p$  層の仮想な地盤における重複反射を示している。 $1/\prod_{n=1}^l (1-r(n))$  はスケールファクタであるから、実際の入射波は分散  $\sigma(p)$  の白色雑音  $\tilde{X}(k|p)$  である。また、 $r(n)$  は下降波の反射係数に対応し、 $L_n$  を換算層厚、 $V_n$  を伝搬速度とすれば、標準化時間  $\Delta T$  との間には  $\Delta T = 2L_n/V_n$  の関係がこの仮想地盤の各層について言える。

さて、実際の地盤構成や波動の伝播機構の複雑さを考えると、地表での強震波を解析的に解くことは不可能に近いと思われる。そこで、この報告では図7に示すような強震波生成の確率的モデルを考える。このモデルでは、強震波の周波数特性を仮想地盤に、その大きさをスケール・ファクタにそれぞれ荷わせている。入力の一様乱数は観測強震波の位相特性が不規則であることから、これを積極的に利用出来る。

このモデルは各震源一観測点毎に適用されるものであるが、個々のモデルにおいても仮想地盤の反射係数は観測波から推定されるもので、唯一的なものではない。したがって、各震源一観測点毎に多くの強震波が測定されれば、これらから確率変数としての反射係数を構成出来る。すなわち、仮想地盤を確率変数からなる系としてモデル化出来る。このとき、次の二点は工学的な応用に際して有用である。一つは全ての反射係数の絶対値が1よりも小さければ、その系は安定であることである。他の一つは、この報告で考えている線形推定の範囲において、各反射係数は各々確率的に独立に処理が出来ることである (2.5 参照)。最初は確率変数としての反射係数に適当な確率構造を入れてモデルを行なうのも、一方法と思われる。

### 2.3 等価質点系

複素  $s$  平面において、振動のモードを表わす二次系の周波数応答関数は下式を含む。

$$(s^2 + 2h_n \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2)^{-1} \quad (48)$$

これに、変換

$$z = \exp(s \cdot \Delta T) = \exp(i\lambda) \quad (49)$$

を行えば (48) 式は下式となる (E. I. Jury, 1964)。

$$H_n(z) = K_n \cdot \exp(-h_n \omega_n \cdot \Delta T) \cdot \frac{z}{(z - z_n)(z - \bar{z}_n)} \quad (50)$$

ここで

$$z_n = \exp(s_n \cdot \Delta T), \quad s_n = -h_n \omega_n + i \omega_n (1 - h_n^2)^{1/2} \quad (51)$$

$$K_n = \frac{\sin(\omega_n \sqrt{1 - h_n^2} \cdot \Delta T)}{\omega_n \sqrt{1 - h_n^2}} \quad (52)$$

とし、 $z_n$  は  $z_n$  の複素共役とする。したがって、二次系の伝達関数は下式を含む。

$$\begin{aligned} |H_n(z)|^2 &= H_n(z) \cdot H_n(z^{-1}) \\ &= K_n^2 \cdot \frac{z}{(z - z_n)(z - \bar{z}_n)} \cdot \frac{z}{(z - \bar{z}_n)(z - z_n^{-1})} \end{aligned} \quad (53)$$

実際の地震動や構造物の振動はこの形の伝達関数の積の形をスペクトルに持つ時間波形として強震計に記録されている。したがって、強震計記録のパワースペクトルから (53) 式の形の因子の積を取り出すことが出来れば、(51) 式によりそれぞれの振動モードの共振振動数と減衰定数が推定出来る。

一次元におけるスペクトル密度関数は (22) 式に対応して下式となる。

$$P(\lambda) = \frac{\delta(p)}{2\pi} \cdot Q^{-1}(z), \quad |\lambda| \leq \pi \quad (54)$$

ここで、特性多項式

$$Q(z) = \left| 1 - \sum_{n=1}^p f(p, n) \cdot z^{-n} \right|^2, \quad |z| = 1 \quad (55)$$

における予測係数  $\{f(p, n), n=1, 2, \dots, p\}$  は  $\{r(n), n=1, 2, \dots, p\}$  から (39) 式を使うことにより求まる。そこで、 $Q(z)=0$  の根を  $\{z_n, n=1, 2, \dots, p\}$  とすれば、(54) 式は下式となる。

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \frac{\delta(p)}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left| \prod_{n=1}^p (1 - z^{-1} \cdot z_n) \right|^2} \\ &= \frac{(-)^p \cdot \delta(p)}{2\pi \prod_{n=1}^p \bar{z}_n} \cdot \frac{z^p}{\prod_{n=1}^p (z - z_n) \cdot (z - \bar{z}_n^{-1})} \end{aligned} \quad (56)$$

したがって、 $Q(z)=0$  の根に  $z_n$  及びその複素共役根  $\bar{z}_n$  が存在すれば (53) 式の因子を  $P(\lambda)$  から取り出し得る。すなわち、 $Q(z)$  を二次因子及び一次因子の積に分解したとき、二次因子から振動モードの共振振動数と減衰定数が決定出来る。

実際の数値計算において、高次代数方程式  $Q(z)=0$  の解法は Bairstow 法 (A. Ralston, 1965) が都合良い。また、この方法では共振振動数はかなり正確に推定されるが、減衰定数については共振振動数推定のような安定さと正確さは期待出来ない (木下繁夫・稲葉誠一, 1976)。

#### 2.4 擬似応答スペクトル

擬似応答スペクトルの算出には人工地震波を用いる直接計算法と不規則振動論に基づく方法とが考えられる。ここでは時間領域における表現である予測誤差フィルタを直接利用出来る前者について考察する。

まず、擬似相対変位応答スペクトルの算出を考える。加速度入力列に対する二次系の変位応答を  $\{W(n), n=1, 2, \dots, N\}$  とする。この二次系の周波数応答関数は形式的に (50) 式と同じであるから、変位応答は下式より求まる。

$$W(z) = -H_n(z) \cdot X(z) \tag{57}$$

ここで、 $W(z), X(z)$  は各々  $\{W(n), n=1, 2, \dots, N\}, \{X(n), n=1, 2, \dots, N\}$  の片側  $z$  変換とする。系は静止状態から入力されたとすれば、(57) 式は (50) 式により下式となる。

$$W(n) = [2 \cos(\omega_n \sqrt{1-h_n^2} \cdot \Delta T) \cdot W(n-1) - \exp(-h_n \omega_n \Delta T) \cdot W(n-2) - K_n X(n-1)] \cdot \exp(-h_n \omega_n \Delta T), \quad n=2, 3, \dots, N. \tag{58}$$

ただし、 $W(0)=0, W(1)=0$  とする。(58) 式は図8のようになる。図中の  $X(n)$  は図7における出力加速度である。

擬似応答スペクトルは各固有振動数と減衰定数における  $\{W(n), n=1, 2, \dots, N\}$  との絶対最大値を求めることから算出される。さらに、図7における一様乱数の組を換えることにより多くの擬似応答スペクトルを求めることが出来る。したがって、それらに統計処理

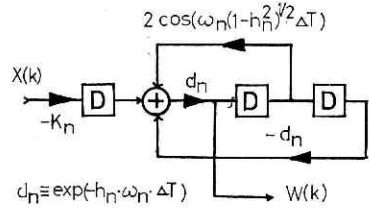


図8 二次系  
Fig. 8 Second order system

を行えば擬似応答スペクトルの平均及び分散を推定出来る。また、この方法では  $N$  と  $\Delta T$  の影響が含まれるので注意を要する。

微分演算は一階差分を取るにより近似的に得られるので、これを利用すれば擬似速度応答スペクトルも同様に算出出来る。

### 2.5 フーリエ展開

確率変数列  $\{X(n), n=1, \dots, N\}$  の線形結合である全ての確率変数からなるベクトル空間を  $H$  とする。 $H$  における二つの要素  $X(j), X(k)$  の内積を

$$(X(j), X(k)) = E[X(j) \cdot X(k)]$$

とする。また  $X(j)$  のノルムを

$$\|X(j)\| = (X(j), X(j))^{1/2}$$

とし、 $X(j)$  と  $X(k)$  との距離を  $\|X(j) - X(k)\|$  とする。

確率変数  $X(k)$  の無相関確率変数列によるフーリエ展開を求めるために、 $H$  における閉部分空間  $M_l = \{X(k-n), n=1, 2, \dots, l\}$  を考える。 $M_l$  と等しい無相関確率変数列  $\{V(n), n=1, 2, \dots, l\}$  からなる部分空間は Gram-Schmidt 法により次式で得られる。

$$V(1) = \frac{X(k-1)}{\|X(k-1)\|}$$

$$V(m) = \frac{\tilde{X}(k-m | m-1)}{\|\tilde{X}(k-m | m-1)\|}, \quad m=2, 3, \dots, l. \tag{59}$$

ここで,

$$\tilde{X}(k-m | m-1) = X(k-m) - \hat{X}(k-m | m-1) \quad (60)$$

$$\hat{X}(k-m | m-1) = \sum_{n=1}^{m-1} (X(k-m), V(n)) \cdot V(n) \quad (61)$$

とする。1 を増して  $M_p = \{V(n), n=1, 2, \dots, p\}$  を構成し、さらに部分空間  $\{M_p, X(k)\}$  でこれを続けければ,

$$\hat{X}(k | p) = \sum_{n=1}^p (X(k), V(n)) \cdot V(n) \quad (62)$$

を得る。もちろん,

$$\tilde{X}(k | p) = X(k) - \hat{X}(k | p) \quad (63)$$

とすれば,

$$(\tilde{X}(k | p), V(n)) = 0, \quad n=1, 2, \dots, p. \quad (64)$$

である。(64) 式は  $\hat{X}(k | p)$  が  $X(k)$  の  $M_p$  の上への射影であり、距離  $\|X(k) - \hat{X}(k | p)\|$  を最小にするという意味で  $M_p$  による  $X(k)$  の最良近似であることを示している (R. E. Kalman, 1960)。したがって、 $X(k)$  は

$$X(k) = \sum_{n=1}^p (X(k), V(n)) \cdot V(n) + \tilde{X}(k | p) \quad (65)$$

とフーリエ展開される。

また、 $X(k)$  の  $M_{n-1} = \{V(m), m=1, 2, \dots, n-1\}$  による近似を

$$\hat{X}(k | n-1) = \sum_{m=1}^{n-1} (X(k), V(m)) V(m) \quad (66)$$

とすれば,

$$\tilde{X}(k | n-1) = X(k) - \hat{X}(k | n-1) \quad (67)$$

としたとき,

$$(\tilde{X}(k | n-1), V(m)) = 0, \quad m=1, 2, \dots, n-1. \quad (68)$$

であるから、 $\hat{X}(k | n-1)$  は  $M_{n-1}$  による  $X(k)$  の最良近似である。したがって、(66) 式より

$$(\hat{X}(k | n-1), V(m)) = 0, \quad m=n, n+1, \dots, p. \quad (69)$$

であるから、(65) 式の展開係数は

$$\begin{aligned} (X(k), V(n)) &= (X(k) - \hat{X}(k | n-1), V(n)) \\ &= \frac{(\tilde{X}(k | n-1), \tilde{X}(k-n | n-1))}{\|\tilde{X}(k-n | n-1)\|} \end{aligned} \quad (70)$$

となる。故に、(38) 式及び内積とノルムの定義から

$$r(n) = \frac{(X(k), V(n))}{\|\tilde{X}(k-n | n-1)\|^2} \quad (71)$$

となるから、(65) 式は

$$X(k) = \sum_{n=1}^p r(n) \cdot \tilde{X}(k-n | n-1) + \tilde{X}(k | p) \quad (72)$$

となる。すなわち、 $\{r(n), n=1, 2, \dots, p\}$  は無相関確率変数列  $\{\tilde{X}(k-n | n-1), n=1, 2, \dots, p\}$  の展開係数となる。したがって、

$$r(n) \cdot \tilde{X}(k-n | n-1), r(m) \cdot \tilde{X}(k-m | m-1) = 0, \quad n \neq m \quad (73)$$

であるから、各展開項は相関がなく確率的に独立に扱うことが出来る利点がある。また、 $\{\tilde{X}(k-n) | (n-1), n=1, 2, \dots, p\}$  が無相関なベクトル値確率変数列となることも同様に言える。

### 3. 数値計算例

ここまで述べてきた方法の有効性を確認するため、実地震波について数値実験を行った。実地震波としては、San Francisco 地震 (1957. 3. 22) の Golden Gate Park の記録を用いたが、選定の理由は特別にはない。数値計算は二次元の場合について行った。すなわち、 $X_1(k)$  を N-S 成分、 $X_3(k)$  を U-D 成分として、 $N=300$ 、 $\Delta T=20$  ms とした。(26) 式の規準では  $n=1, 2, \dots, 14$  の範囲において  $p=12$  が求まった。ただし、 $M=2$  である。

図9に二次元の予測誤差フィルタを、表1に推定された各パラメータを各々示す。実際の計算では仮数部 37 ビットの実数計算であるが、表1は小数点以下4桁目を四捨五入したものである。スペクトル密度行列の推定に対して、この四捨五入はほとんど影響しない。

図10-1~図10-4までに原記録の標本スペクトル密度行列と推定スペクトル密度行列を示す。横軸は全て  $\lambda/(2\pi \cdot \Delta T)$  である。密度行列は Hermite 行列であるから、対非角成分はその実数部と虚数部とで記述される。図11は表1のパラメータを用いた図9のフィルタによる合成二次元波を示している。図は最初の4秒間を示している。計算では  $\Delta T=20$  ms とし、1,000 サンプル発生させている。後半の500サンプルの標本スペクトル密度行列を図10-1~図10-4における推定スペクトル密度行列と対比させて、図12-1~図12-4に示す。

図9の入力列は、 $\eta(k)$  を 0-1 間の一様乱数として、

$$\xi(k) = \left[ \frac{2}{\ln \eta(k)} \right]^{1/2} \cdot \sin(2\pi \cdot \eta(k+1)) \quad (74)$$

$$\zeta(k) = \left[ \frac{2}{\ln \eta(k)} \right]^{1/2} \cdot \cos(2\pi \cdot \eta(k+1)) \quad (75)$$

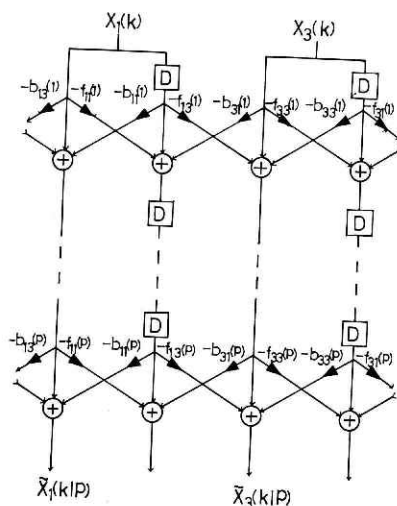


図9 二次元予測誤差フィルタ  
Fig. 9 Two dimensional prediction error filter

表 1 二次元予測誤差フィルタのパラメータ  
Table 1 Parameters of the two dimensional prediction error filter

$n$	$f_{11}(n)$	$f_{13}(n)$	$f_{31}(n)$	$f_{33}(n)$	$b_{11}(n)$	$b_{13}(n)$	$b_{31}(n)$	$b_{33}(n)$
1	0.740	0.124	-0.008	0.538	0.749	-0.093	0.032	0.529
2	-0.709	-0.100	-0.010	-0.633	-0.715	0.021	-0.020	-0.626
3	0.357	0.043	0.008	0.405	0.359	-0.003	0.006	0.401
4	-0.380	0.183	0.035	-0.264	-0.387	0.120	0.072	-0.265
5	-0.112	-0.002	0.015	0.069	-0.116	0.044	-0.007	0.068
6	-0.066	-0.326	-0.049	-0.019	-0.069	-0.118	-0.127	-0.006
7	-0.098	-0.179	0.009	0.031	-0.108	0.036	-0.072	0.038
8	-0.149	-0.102	0.062	0.068	-0.167	0.181	-0.044	0.070
9	-0.085	0.148	-0.015	-0.182	-0.089	-0.023	0.071	-0.181
10	0.016	-0.114	-0.009	-0.026	0.019	-0.026	-0.043	-0.017
11	-0.023	0.117	0.011	-0.077	-0.027	0.033	0.051	-0.080
12	0.163	0.303	-0.017	-0.171	0.183	-0.079	0.131	-0.181

$$\hat{\Sigma}(12) = \begin{bmatrix} 3610 & 392 \\ 392 & 1571 \end{bmatrix}$$

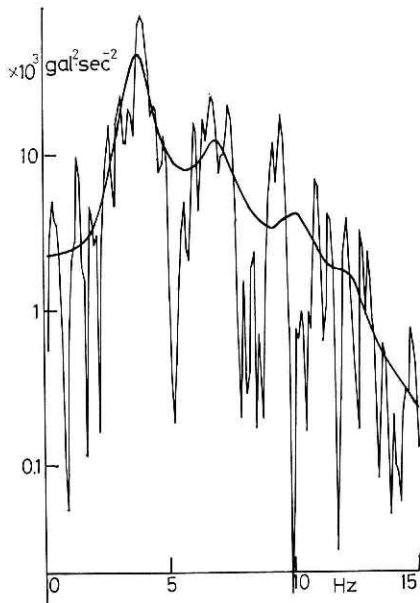


図 10.1 スペクトル密度関数 (記録波,  $N-S$  成分)

Fig. 10.1 Power spectral density function (recorded  $N-S$  component)

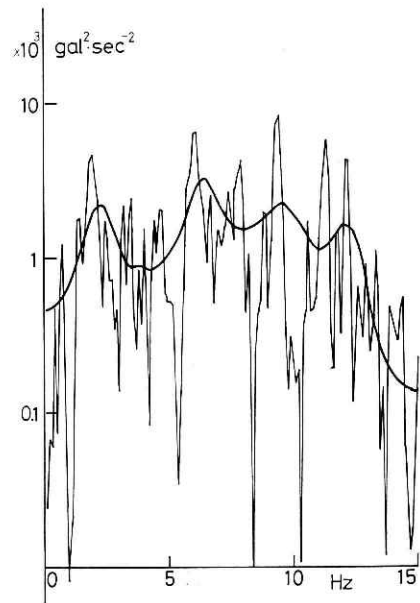


図 10.2 スペクトル密度関数 (記録波,  $U-D$  成分)

Fig. 10.2 Power spectral density function (recorded  $U-D$  component)

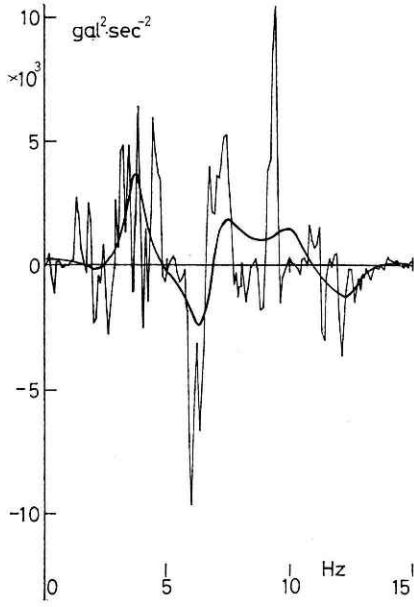


図 10.3 コ・スペクトル (記録波)  
Fig. 10.3 Co-spectrum (recorded)

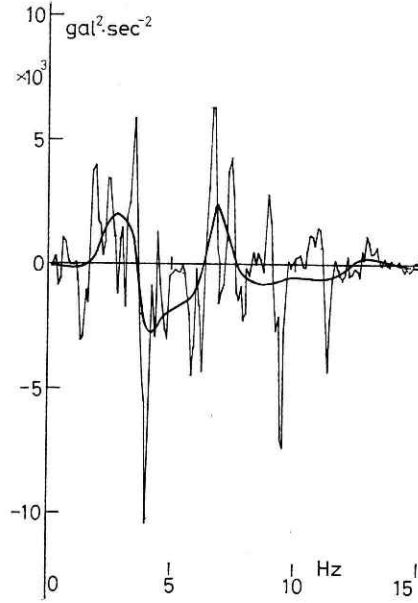


図 10.4 クワッド・スペクトル(記録波)  
Fig. 10.4 Quad-spectrum (recorded)

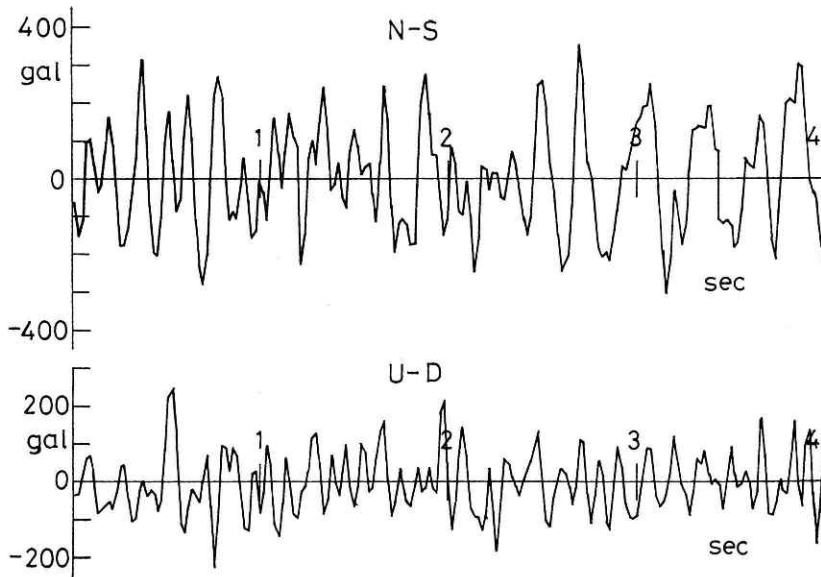


図 11 二次元合成波 (0-4 秒)  
Fig. 11 A sample of two dimensional artificial acceleration wave (0-4 sec)



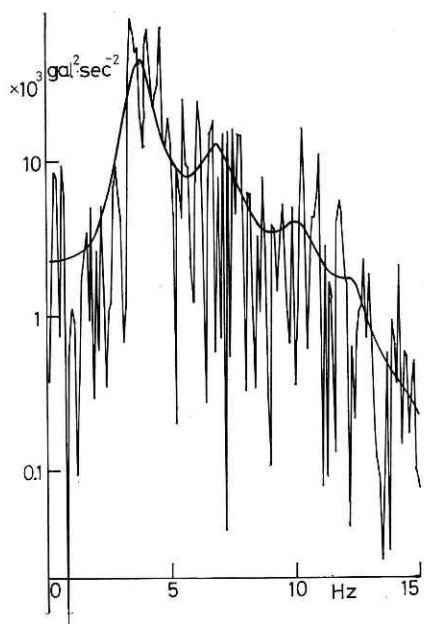


図 12.1 スペクトル密度関数 (合成波, *N-S* 成分)

Fig. 12.1 Power spectral density function (synthesized *N-S* component)

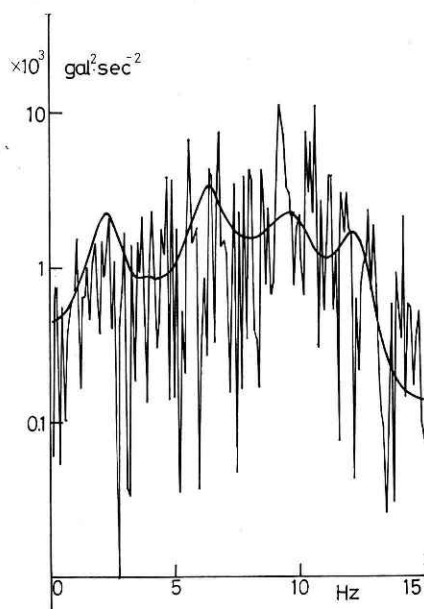


図 12.2 スペクトル密度関数 (合成波, *U-D* 成分)

Fig. 12.2 Power spectral density function (synthesized *U-D* component).

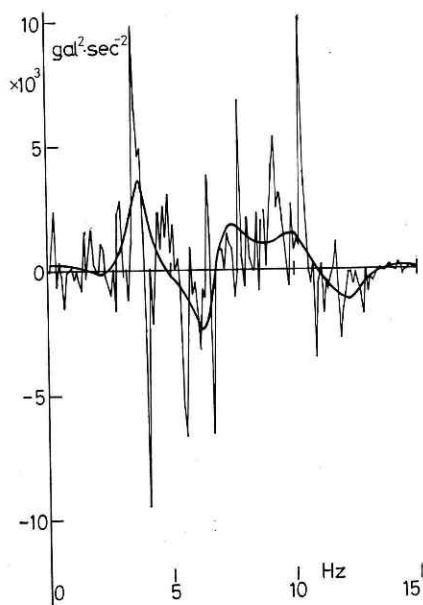


図 12.3 コ・スペクトル (合成波)  
Fig. 12.3 Co-spectrum (synthesized)

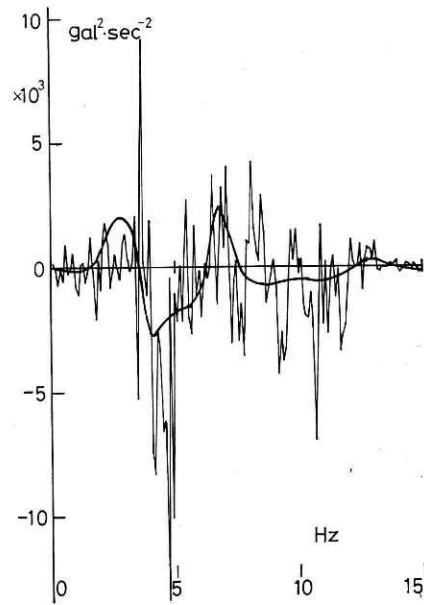


図 12.4 クワッド・スペクトル (合成波)  
Fig. 12.4 Quad-spectrum (synthesized)

なる二次元の独立な平均零，分散1の白色ガウス列 (B. Gold and C. M. Rader, 1969) を用いて下式から構成した。

$$\tilde{x}_3(k | p) = [(\tilde{\Sigma}(p))_{22}]^{1/2} \cdot \zeta(k) \quad (76)$$

$$\tilde{x}_1(k | p) = \left[ (\tilde{\Sigma}(p))_{11} - \frac{(\tilde{\Sigma}(p))_{12}^2}{(\tilde{\Sigma}(p))_{22}} \right]^{1/2} \cdot \xi(k) + \frac{(\tilde{\Sigma}(p))_{12}}{(\tilde{\Sigma}(p))_{22}} \cdot \tilde{x}_3(k | p) \quad (77)$$

また，表1からも知れるように各パラメータ間には

$$f_{1,1}(n) \simeq b_{1,1}(n), \quad f_{3,3}(n) \simeq b_{3,3}(n), \quad n=1, 2, \dots, p. \quad (78)$$

の関係が見出される。すなわち，各成分におけるパラメータ間には(33)式の関係が近似的に成立する。これは二次元予測誤差フィルタにおいても仮想地盤の概念が拡張出来ることを意味している。

#### 4. 結 論

強震計記録主要動部を定常確率過程とみなして，これをパラメータ化した。これらから，周波数領域における表現と三次元までの模擬地震波合成法を導いた。この方法は従来の三角関数系によるフーリエ展開と異なり，無相関確率変数列によるフーリエ展開を基礎にしている。その利点は三角関数系と比較してはるかに少い展開項数で地震動の特徴を表現出来ることであり，多数の強震記録をファイルしておくのに適した方法と考える。

#### あとがき

この報告では，方法の確立に重点を置いた。そのため簡単な数値計算例を一つ述べたにすぎなかったが，次報告では耐震工学に使えるような型に適用例をまとめる予定である。また，パラメータを時間的に変動させた場合の非定常的な取扱いについても考察する予定である。

#### 謝 辞

本研究の内容について，耐震実験室の諸兄から種々の御意見を頂いた。深く感謝致します。また，一次元予測誤差フィルタの他分野への応用を扱った次の二文献は多くのことを参考にさせて頂いた。各著者の方々に感謝の意を表します。板倉文忠・斎藤収三 (1969), D. C. Riley and J. P. Burg (1972)。

#### 参 考 文 献

- 1) Akaike, H. (1974): A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. A.C.*, **19**, 6, 716-723.
- 2) Box, G. P. and G. M. Jenkins (1970): Time series analysis, forecasting and control, Holden-Day, 65.
- 3) Gold, B. and C. M. Rader (1969): Digital processing of signals, McGraw-Hill, 144-146.
- 4) 板倉文忠・斎藤収三 (1969): 偏自己相関係数による音声分析合成系, 日本音響学会講演論文集, **199**.
- 5) Jones, R. H. (1974): Identification and autoregressive spectrum estimation, *IEEE Trans.*

- A. C., 19, 6, 894-898.
- 6) Jury, E. I. (1964): Theory and application of the Z-transform method, John-Wiley & Sons, 298.
  - 7) Kalman, R. E. (1960): A new approach to linear filtering and prediction problems *A.S.M.E., J. Basic Engineering*, 82, 35-45.
  - 8) 木下繁夫・稲葉誠一 (1976): 電力用遮断器の振動実験, 防災科学技術研究資料, 第 24 号.
  - 9) Parzen, E. (1968): Multiple time series modeling, *Technical report No. 12*, Department of statistics, Stanford University.
  - 10) Ralston, A. (1965): A first course in numerical analysis, McGraw-Hill, 372-378.
  - 11) Riley, D. C. and J. P. Burg (1972): Time and space adaptive deconvolution filters, *Preprint of the 42nd meeting of the Society of Exploration Geophysists*.
  - 12) Whittle, P. (1963): On the fitting of multivariate autoregressions, and the approximate canonical factorization of a spectral density matrix, *Biometrika*, 50, 129-134.

(1976 年 11 月 17 日原稿受理)