

耐震実験装置の加速度制御の可能性に関する試験

菅原正巳・勝山ヨシ子

国立防災科学技術センター第3研究部

An Experiment for the Possibility of Acceleration Control of an Electrohydraulic Vibration Generation System

By

M. SUGAWARA and Y. KATSUYAMA

National Research Center for Disaster Prevention, Tokyo

Abstract

Acceleration data of the El Centro earthquake is used as test input. As the given numerical data are the series for unequal time intervals, we have turned the series into the time series for an equal time interval of 10^{-4} second, using the interpolation by the third-order polynomial, and then the time series is converted into displacement by integration.

If we integrate it simply, we will get the result with large drift, because of the existence of low-frequency noises. So it is necessary to cut off the low-frequency components by subtracting the running mean. For this purpose we use the incomplete integral, in other words, the first-order lag system.

As the power spectra of acceleration of the El Centro earthquake show a peak at 2 c/s, we have expected that the incomplete integral with time constant of 1 - 2 seconds would eliminate the drift, but in vain. Finally we set the time constants at 0.1024 sec., 0.2048 sec. and 0.4096 sec. respectively, which were rather too short to preserve the original wave form.

Incomplete integral is carried on by digital computer and by analog computer. Analog computer is used because of the practical reason that the acceleration control system will be composed of analog units, but digital computer is preferable at experimental stages because of its reproducibility and its accuracy. Displacement data obtained by incomplete integral are recorded in data recorder, and are used as the input of the experiment.

Output acceleration picked up on the vibrating table of our experiment shows many sharp peaks in its graph, and contains more of high-frequency components compared with the original one. It resembles not so good to the

original acceleration of El Centro earthquake which shows rather low-frequency vibrations. Our vibration system does not so good follow the input, namely, while the input consists of merely low-frequency components, the output has independent oscillations in high-frequency region picking up high-frequency noise.

Though the output acceleration does not resemble the acceleration of El Centro earthquake, they may resemble each other well after the operation of some filter which has a practical meaning for users of vibration system.

In view of the above consideration we operate the second-order lag system having its resonance peak at 1 - 5 c/s as a filter which gives similar effect to the experiment when we set up some structure on the vibrating table.

The results are very good. Results obtained by the operation on the output acceleration of the vibrating table nearly coincide with those obtained by the operation on the original acceleration of El Centro earthquake.

1. 概 要

1.1 テスト用の加速度入力として El Centro 地震の加速度が用いられた。与えられた数値記録を三次式を用いて補間し、 10^{-4} 秒刻みの時系列に直し(長さ 30 秒, 時系列として 30 万個), これを 2 回積分して変位に換えた。

1.2 単に積分すると低周波ノイズを含んで積分する結果, 大きなドリフトが現われて処理に困る。そこで積分と同時に低周波を切る必要がある。それには積分したうえで, 適当な幅で移動平均を作り, それを積分から差し引いて低周波成分を落とせばよい。その一種として不完全積分を用いた。それは一次遅れを施すことである。

1.3 El Centro 地震の加速度のパワースペクトルをとると 2% のあたりにピークがある。そこで時定数 1~2 秒程度で不完全積分を行えばよからうと予想したが, これではドリフトが全く落ちない。結局, 時定数 0.1024 秒, 0.2048 秒, 0.4096 秒の 3 種類について不完全積分を行ない, 得られた変位を用いて, 加速度制御の試験を行なうことにした。

1.4 不完全積分はデジタル, アナログの両方式で行なった。アナログで行なってみたのは, 最終的には加速度制御はアナログ機構による不完全積分を用いることにならうと期待したからである。試験の段階ではデジタルの方がノイズの混

入が少なく, また設定値を正確に置くことができると都合がよい。

1.5 不完全積分によって得られた変位はデータレコーダに記録され, 実験に用いられた。この変位記録を入力として振動台を動かし, 出力加速度の記録をとってみると, そのグラフは多くのトゲを持ち, 高周波成分に富んだもので, これをもとの El Centro の加速度と比較すると, どこどこが対応するかはわかるが, 似た形をしているとは言いがたい。El Centro の加速度がかなり低周波の振動であるので, 追従があまり良くないのである。

1.6 振動台にものを載せて振らせる場合の効果を考える目的で, 共振のピークが 1%~5% にある種々の二次遅れ系を考え, それを振動台でゆらせることを考える。すなわち振動台の出力加速度 (El Centro 加速度で加速度制御した場合の) をこれら二次遅れ系の入力とした場合の出力を, El Centro の加速度そのものを入力とした場合の出力と比較してみると, 結果は驚くほどよく一致する。出力加速度は見たところ El Centro と似ていないけれども, 1%~5% の二次遅れ系に対しては同じ効果を与えるのである。したがってある意味で加速度制御は成功したと言ってよい。つまり鈍い測器で出力加速度を測れば, 多分それは El Centro の加速度とかなりよく一致したで

あろう。

2. El Centro地震の加速度波形について

2.1 El Centro地震(1940年5月18日、カリフォルニア)の加速度資料は時刻と加速度の表として与えられている。

表-1はその一部を示している。これには何かの誤りがあるのではなからうか。この表では時間が

10^{-4} 秒単位、加速度は有効数字6けたで与えられているが、どちらも測定値そのものではあるまい。何かの処理を経てけた数が増したものであろう。ここで不思議なのは、総数564組の測定値のうち、表-1に見るように2個続いて、同一時刻の現われるものが45組あることである。図-1は表-1の資料の一部を図示したもので、同一時刻に現われる二つの加速度の意味は理解しにくい。

表 - 1

No	時間	加速度		No	時間	加速度	
1	.0000	+ .001723		31	1.4397	- .101813	
2	.0415	- .007993		32	1.4812	- .095718	
3	.0969	+ .006917		33	1.5089	- .115155	
4	.1606	- .009018		34	1.5366	- .135111	
5	.2215	+ .010169		35	1.6279	+ .107509	
6	.2630	- .008619		36	1.7027	+ .228693	
7	.2907	- .002784		37	1.7996	+ .136039	
8	.3322	- .009908		38	1.8550	+ .171036	
9	.3738	+ .011480		39	1.9242	- .267653	
10	.4291	- .032319		40	2.0072	- .325965	最大
11	.4707	- .000822		41	2.2149	+ .289008	
12	.5814	+ .034181		42	2.2703	+ .257261	
13	.6229	+ .001137		43	2.3201	- .304550	
14	.6645	+ .005677		44	2.3948	- .000630	
15	.7198	- .016997		45	2.4502	+ .280607	
16	.7198	- .033845]	211	11.4343	+ .118854	
17	.7891	- .046798]	212	11.5727	- .099119	
18	.7891	- .064942]	213	11.6558	- .123864	
19	.8721	- .031238]	214	11.7250	- .208616]
20	.8721	- .042254]	215	11.7250	- .140965]
21	.9413	- .048079]	216	11.7804	- .115428	
22	.9413	- .068167]	217	11.8081	+ .000956	
23	.9967	- .086694]	218	11.8773	+ .077167	
24	1.0659	- .074375]	219	11.9188	+ .057991	
25	1.0659	- .045863]	220	11.9880	+ .136406	
26	1.0936	- .050656		221	12.0434	+ .068371	
27	1.1683	+ .082192		222	12.1126	+ .087559	
28	1.3151	- .176994		223	12.1680	+ .065143	
29	1.3843	- .090155		224	12.1680	- .006785]
30	1.4120	- .090152		225	12.2095	- .026220]
				226	12.2095	- .058880]
				227	12.2538	- .014552]
				228	12.2538	- .048248]
				229	12.3618	- .007672	
				230	12.3756	- .052124	

オリジナルデータ(グラフ)の写真でもあるとよいが、入手できなかった。

2.2 図-2は横軸に測定値番号(われわれが用いた資料はIBM-650カードを印刷したと

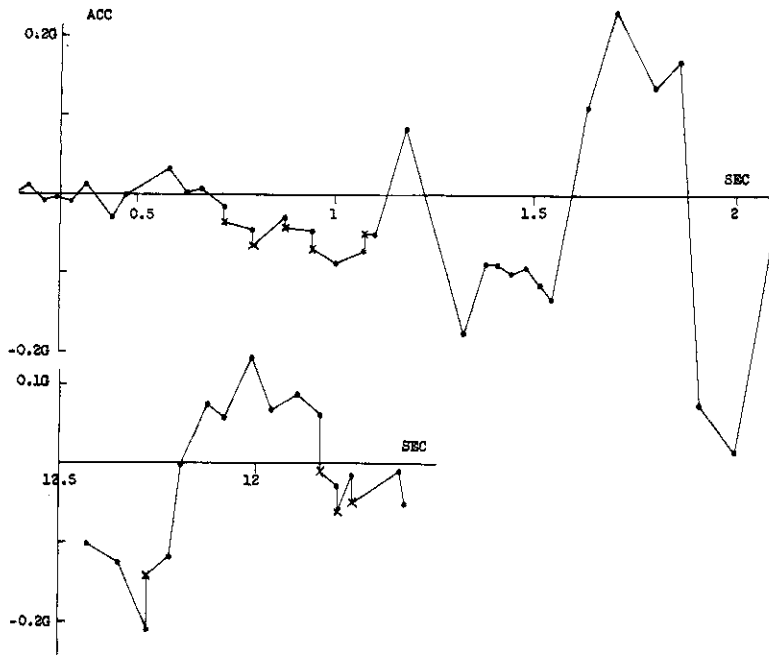


Fig. 1

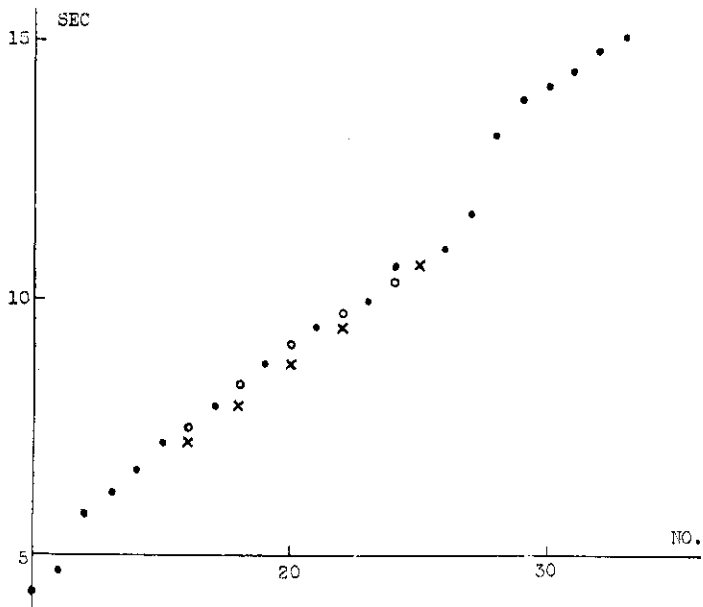
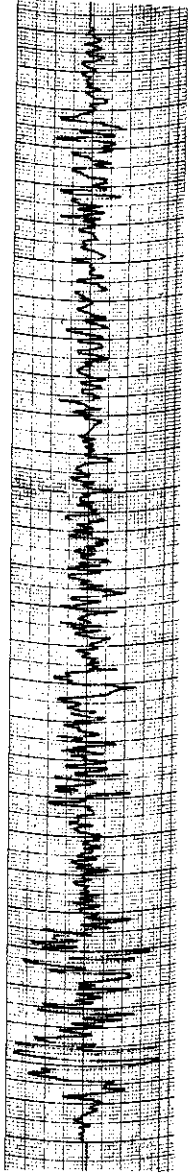
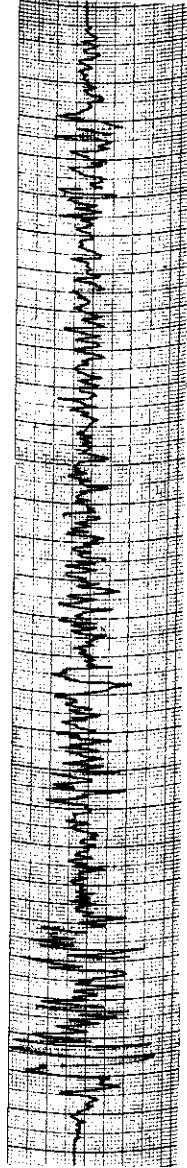


Fig. 2

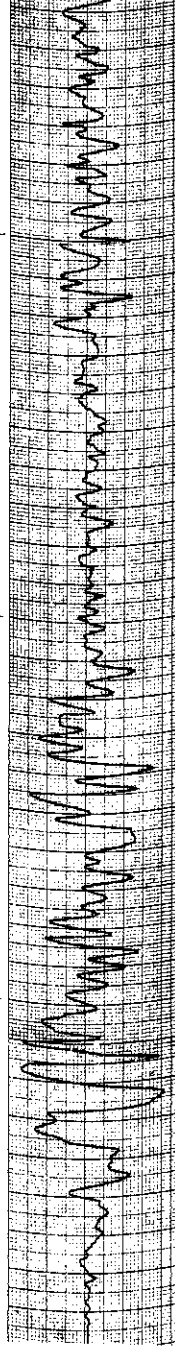


Interpolation by third order polynomial.

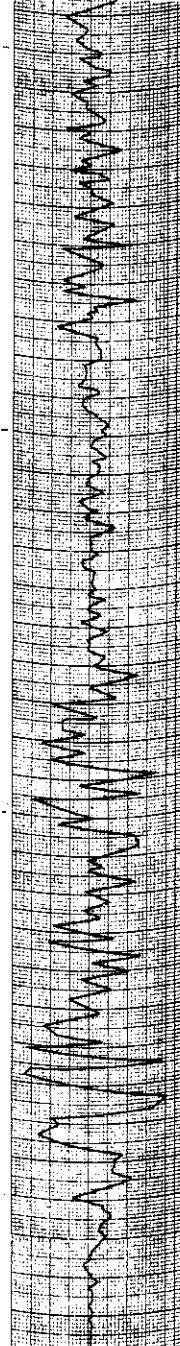


Linear interpolation.

Fig. 3. Acceleration of E1 Centro earthquake.



Interpolation by third order polynomial.



Linear interpolation.

Fig. 4. Acceleration of E1 Centro earthquake (beginning part).

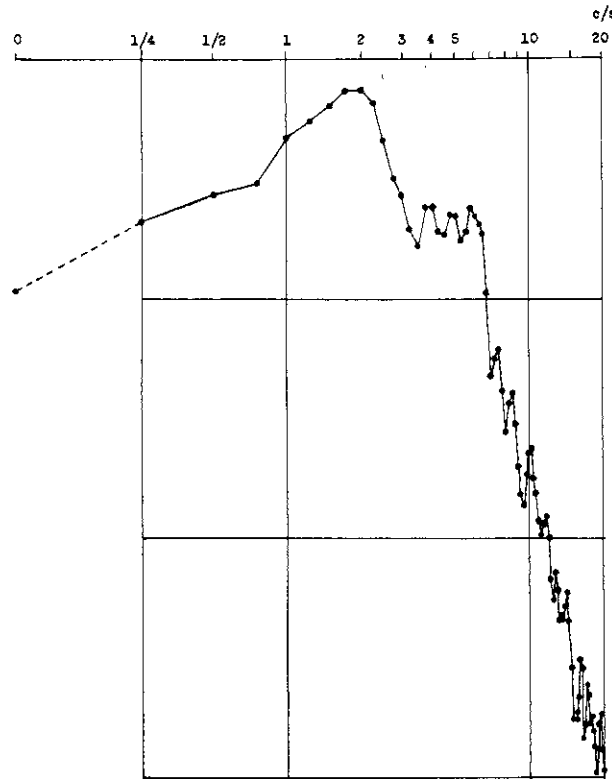


Fig. 5. Power spectra of the acceleration of El Centro earthquake.

いうもののコピーで、カード1枚に4組の測定値がはいり、カード番号が打ってある。ここで用いたのは、時間、加速度の測定値に順次番号を打ったもの)を、縦軸に時間をとって、点を打ったものである。この点の並び方から見て、時間の方に何かの誤りがあったものと考え、はなはだ便宜的であるが、時間のダブっている点は図-2の白丸の位置にずらすことにした。時間の重なっている場所については、すべて図-2のような図を描き、どちらか一方をずらし、同一時刻に2個の加速度が現われないようにした。今回の処理方法は全く便宜的であって、El Centro の資料については、これらの疑点が明らかにされることが望ましい。

2.3 さてこのようにして得られた点を、どのようにしてつなぐかが問題である。何もわからないときには直線でつなぐのが一つの方法であるから、まず直線でつないでみた。直線補間は 10^{-4}

秒刻みで、計算機で行ない、できた数値をD/A変換してペンレコーダにつなぎ、グラフを描かせた。得られた折れ線の形はあまりよくない。この折れ線を見ると、与えられた数値資料の測定点は大部分加速度の極値点、または安定点 (stationary point, すなわち微分係数が0である点) であるらしい。不等間隔に時刻、加速度が測られているというのは、その点が何か特別な点であることを示すものであろうから、それが安定点であると考えるのはあまり無理でないように思われる。

2.4 観測点がすべて安定点であると仮定すれば、それをつなぐのは直線でない方がよい。つなぐのに正弦曲線の $1/4$ 周期分 (谷底から山頂までの部分) を用いるか、または三次曲線を用いるかと迷ったが、手間は後者の方が少し簡単であるから、三次曲線を用いることにした。三次補間は 10^{-4} 秒刻みで行ない、D/A 変換してペンレコーダでグラフを描かせた。図-3は直線補間、三

次曲線補間による El Centro 地震の加速度のグラフ、図-4 は拡大して描かせたものの一部で、三次式補間の方がグラフの形は格段によいようである。以下の解析には三次曲線補間のものを用いた。

2.5 図-5 は El Centro 地震の加速度のパワースペクトル密度である。これは三次補間で作られたデータを $1/100$ 秒で抽出し（実際は 10^{-4} 秒刻みのデータを 100 個ずつまとめて、その平均をとった）、3,000 個のデータのコレログラムを作り、それからパワースペクトルを算出したもので、2% のあたりにピークを持っている。なお直線補間の資料から出したパワースペクトルも、これとほぼ同じ結果を与えた。

3. 変位への変換

3.1 加速度を 2 回積分すれば変位になる訳であるが、加速度資料に混入している誤差（ノイズ）のことを考えると、単なる積分ではうまく行かないことがわかる。周波数 f の成分は積分によって振幅が $(1/2\pi f)$ 倍になる。パワーで言えば $(2\pi f)^{-2}$ 倍である。したがってノイズが小さい場合でも低周波成分が大きく増幅される結果として、積分して出て来る曲線には大きなドリフトが含まれることになる。たとえばあらかじめ平均を引き、直線的その他のトレンドを取り除いて置いたとしても、それだけでは積分した結果に大きな不規則なりねりが現われ、そのために高周波成分が見えなくなることも起こる。積分を計算機で行なえば、有効数字が十分あるから、数値のうえでは高周波成分も残っているが、D/A 変換すれば、ドリフトに比べて小さい高周波成分は誤差の中に埋もれてしまうのである。

3.2 そこで積分と同時に低周波成分を落とすことが必要になる。ある時系列から低周波成分を落とすには、適当な移動平均を作り、それをもとの時系列から引き去ればよい。

移動平均を作るということは、あるウェイト関数を掛けて積分することで、式で書けば

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(s) x(t-s) ds$$

により、 $x(t)$ が平均化された $\tilde{x}(t)$ に変換される。 $w(t)$ として用いられる最も簡単なものが、ある幅 a で単純平均をとる場合で、それは $w(t)$ が幅 a の一様分布の場合である。

これを 2 度くり返せば、二等辺三角形のウェイトを掛けて積分することになり、3 度くり返せば山形の曲線のウェイトを掛けて積分することになる（図-6）。これを何回かくり返せば正規曲線のウェイトを掛けて積分することになる（確率論における中心極限定理に対応する）。このようにして移動平均を作れば低周波が保存され、高周波が落ちるから、これをもとの時系列から引けば、逆に低周波成分が落ち、高周波が残ることになる。

3.3 われわれはこの方法で低周波を落とそうとした。さきに風波の解析の際にこの方法でうまく行ったことがあるので、今回もそれでよいと考えたのである。ところが他の事情から、この方法は今回の目的には役に立たない。今回のデータは 10^{-4} 秒刻みで 30 万個、周波数 2% のあたりにパワーのピークを持つものである。そこで仮に 0.5% 程度以下の低周波を切ることになれば、2 秒程度の幅で移動平均をとればよいが、2 秒の幅は時系列では 2 万個である。2 万個を幅として移動平均をとることになると、16,000 語のコアメモリしか持たないわれわれの計算機では、この計算はほとんど絶望的になる。もちろん磁気ドラム、磁気テープ等の補助メモリを使えばできない訳はないが、恐るべき時間がかかる。

その後コアメモリの中に遅延線（delay line）のようなバッファを作り、かなり長い幅の移動平均（ $2^{13} \div 8,000$ 程度）までがとれる

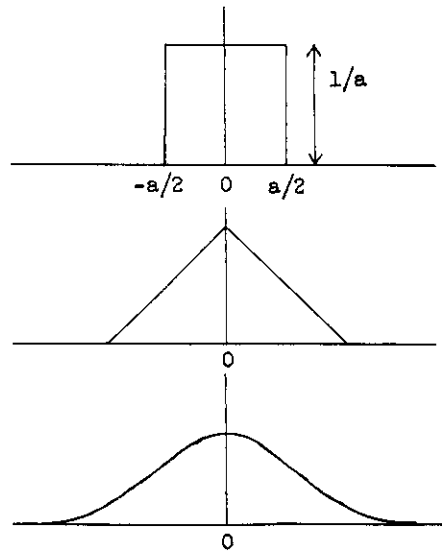


Fig. 6

ような命令を開発したが、ともかくこの方法で低周波成分を落とすことはやめて、不完全積分の方法によることにした。

3.4 不完全積分とは指数関数 $e^{-\lambda t}$ を応答関数とする演算で、一次遅れと同じものである。菅原が河川の流出でよく用いるモデルで言えば、図-7の流入量 $f(t)$

から貯留量 $F(t)$ を出すのが不完全積分で、もし下の流出孔がふさがってれば、 $F(t)$ は積分になるわけである。

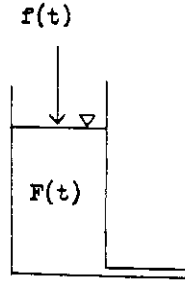


Fig. 7.

演算子で書けば、

不完全積分は

$1/(P+\lambda)$ で、これを積分 $1/P$ に換えようというものである。周波数応答で表わせば、積分 $1/i\omega$ の代りに $1/(i\omega+\lambda)$ を利用することで、 $\omega \gg \lambda$ となる高周波に対しては積分と同様にはたらし、低周波 $\omega \approx 0$ に対しては $1/(i\omega+\lambda) \approx 1/\lambda$ であるから、低周波に対しては利得は $1/\lambda^2$ とほぼ一定になる。

このようにして低周波ノイズの増幅は防げることになる。

実はこの不完全積分は、ウェイト関数として $w(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ を用いた移動平均引き去りによる低周波除去に一致するのである。次にそれを示す。

$$f(t) \text{ の積分を } F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt$$

とすれば、不完全積分 $\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f(t-s) ds$ は部分積分を用いて次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f(t-s) ds \\ &= \left[e^{-\lambda s} (-F(t-s)) \right]_0^{\infty} \\ & - \int_0^{\infty} (-\lambda e^{-\lambda s}) (-F(t-s)) ds \\ &= F(t) - \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} F(t-s) ds \end{aligned}$$

最後の式の後の項が $\lambda e^{-\lambda t}$ をウェイト関数とする移動平均で、それを $F(t)$ から引いて低周波成分を落としているのである。

不完全積分の計算はデジタル、アナログのどちらについてもきわめて容易である。デジタルに時系列 $\{x_i\}$ を不完全積分して $\{y_i\}$ に変換するには、次式を用いればよい。

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j=0}^{\infty} r^j x_{i-j} \\ &= x_i + r y_{i-1} \end{aligned}$$

ここに $r = e^{-\lambda \Delta t}$ で、 Δt は時系列の時間間隔である。

3.5 計算を実行するとなると、時定数 $T=1/\lambda$ の値の定め方が問題になる。El Centro 地震の加速度のパワースペクトルのピークは2%のあたりで、0.5%のあたりにもかなりのパワーがあるから、0.5%はあまり消さず、それよりも低い所を消すつもりで考えた。

不完全積分、積分の周波数応答関数はそれぞれ $1/(i\omega+\lambda)$ 、 $1/i\omega$ であるから、両者の利得の比は

$$\omega^2 / (\omega^2 + \lambda^2) = 1 / (1 + (\lambda/\omega)^2)$$

である。 $\omega = 3\lambda$ であれば、利得の相異は約10%減、2回の積分をくり返して約20%減である。 $\omega = 2\lambda$ であれば、利得の相異は約25%減、2回くり返せば約半分になる。

そこで $\omega = 3\lambda$ のあたりを目標とし0.5%に対して、 $2\pi \times 0.5 = 3\lambda$ となる λ を求めれば $\lambda \approx 1$ である。

$$r = e^{-\lambda \Delta t} \approx 1 - \lambda \Delta t$$

$\Delta t = 10^{-4}$ で、 $\lambda \approx 1$ ということから、 r の値として

$$r = 1 - 2^{-13}, \quad r = 1 - 2^{-14}$$

と一応定めた。

3.6 上記の r の値は

$$\lambda = 10^4 / 2^{13} = 10,000 / 8,192 \approx 1.2$$

$$\lambda = 10^4 / 2^{14} = 10,000 / 16,384 \approx 0.6$$

に対応するもので、時定数 $T = 1/\lambda$ で言えば約0.8秒と1.6秒である。

この値で不完全積分をしてみると、ドリフトは全然落ちない。われわれの計算では被積分関数に2回の不完全積分を施し、絶対値最大の値で割ってからD/A変換してペンレコーダに取り出すから、ドリフトが大きいと、振動部分は消えて、出て来るものはドリフトだけということになる。

図-8は不完全積分の結果で、比較のため、

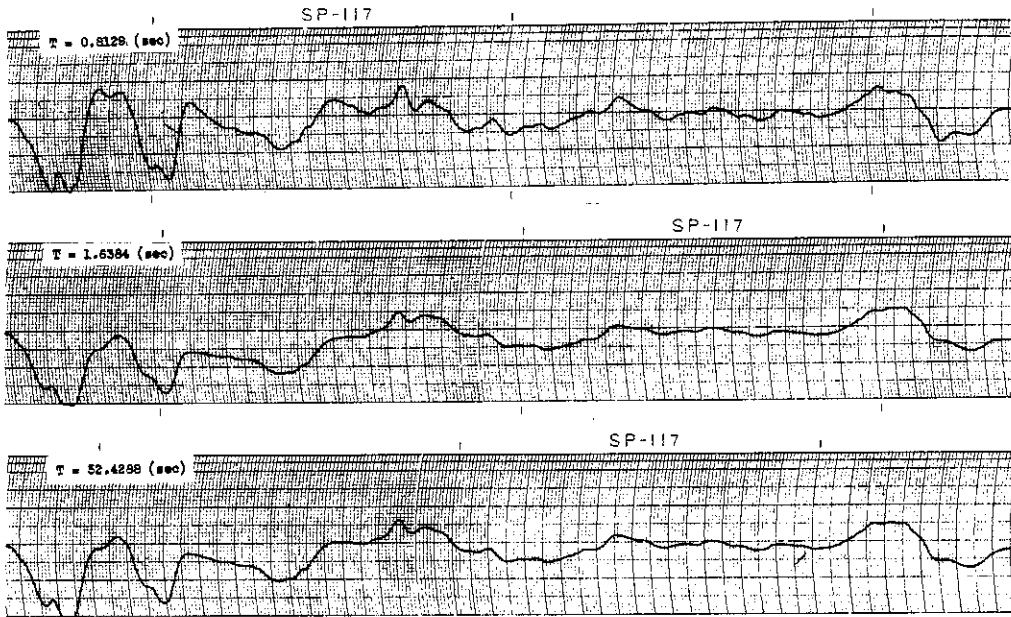


Fig. 8. Derived displacement of El Centro earthquake by incomplete integration with time constant T .

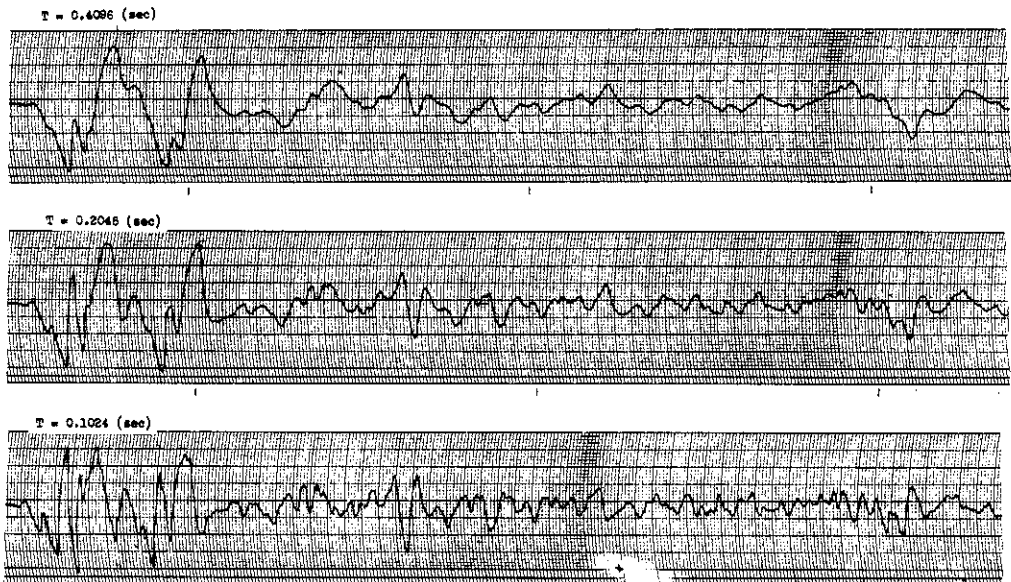


Fig. 9. Derived displacement used for the input in the experiment (T is the time constant of the incomplete integral).

$r = 1 - 2^{-19}$ を用いた場合も出している。
 $r = 1 - 2^{-19}$ は時定数約 50 秒で、実質的には無限大の場合と考えてもよい。時定数 1.6 秒の場合と、50 秒の場合とが、ほぼ同じ形の曲線を与えるところから見ると、時定数 1.6 秒ではドリフトは全く落ちず、0.8 秒にして少し取れたという程度にすぎない。

3.7 いたし方ないから、 r の値をさらに小さくして、

$$r = 1 - 2^{-12}, 1 - 2^{-11}, 1 - 2^{-10}$$

と置いて計算してみた。図-9はこの結果を示す。これは時定数にして、

$$2^{12}/10^4 = 0.4096 \text{ 秒}, 2^{11}/10^4 = 0.2048 \text{ 秒}$$

$$2^{10}/10^4 = 0.1024 \text{ 秒}$$

λ で言えば、およそ 2.5, 5, 10 に当たる。

積分の代りに不完全積分を用いたことによる利得の相異を与える式 $1/(1+(\lambda/\omega)^2)$ に入れて考えてみると、2 回の不完全積分により、 $\lambda = 2.5$ では 0.5% の、 $\lambda = 5$ では 1% の、 $\lambda = 10$ では 2% の成分のパワーが、完全積分の場合に比べて約 1/3 に減ることがわかる。

El Centro 地震の加速度のパワーのピークが 2% であり、0.5% のあたりまでかなりのパワーがあるのだから、0.4 秒 ~ 0.1 秒のように短い時定数で不完全積分を行なうことは、低周波ノイズによるドリフトを落とすだけでなく、原波形を大

きく変形することになる。しかしともかく

$$T = 0.4096 \text{ 秒}, 0.2048 \text{ 秒}, 0.1024 \text{ 秒}$$

の時定数で不完全積分を行ない、それを入力として振動実験を行なうことにした。なお時定数をさらに小さくすると、積分の性質は全く失われ、El Centro の加速度そのものが、波形を少しくずして現われてくる。

3.8 低周波ノイズによるドリフトを除くための不完全積分が波形をくずす一つの原因は、不完全積分が低周波除去フィルタとしてあまり性能がよくない点にあるのではなからうか。それは過去側だけで片側移動平均を用いていることから察せられる。しかし不完全積分はアナログ的に簡単に構成できるし、過去側だけを用いることは実時間処理（たとえばパイの加速度から速度を出し風速計の補正をする場合）に対しても都合がよい。両側の移動平均によるドリフト除去を実時間処理で行なうには、遅延機構が必要で、これについてはある程度の数値的実験もできているが、今回の現場試験には実施しなかった。

3.9 いずれ加速度制御が行なわれるときには、アナログ機構が用いられるであろうと考え、その試験としてアナログ計算機を用いて不完全積分を行なった結果が図-10である。当然のことながら、デジタルの場合と同様の結果が得られる。われわれは精度や、ノイズの混入を心配したが、その点は大丈夫らしい。

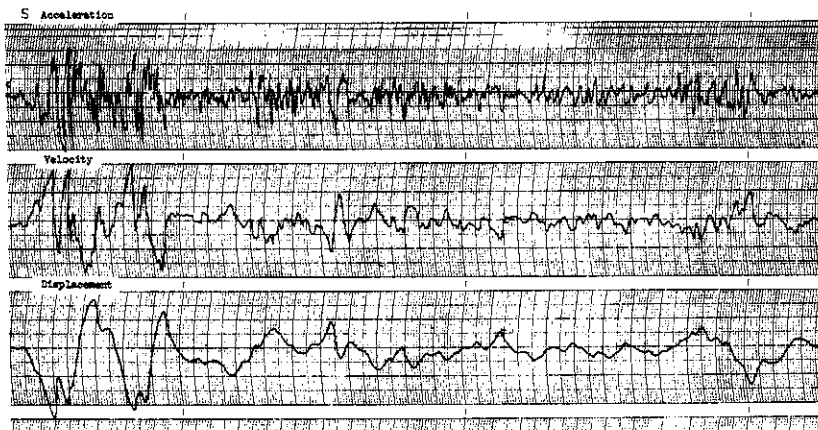


Fig. 10. The results of the incomplete integral ($T = 0.4 \text{ sec}$) by analog computer.

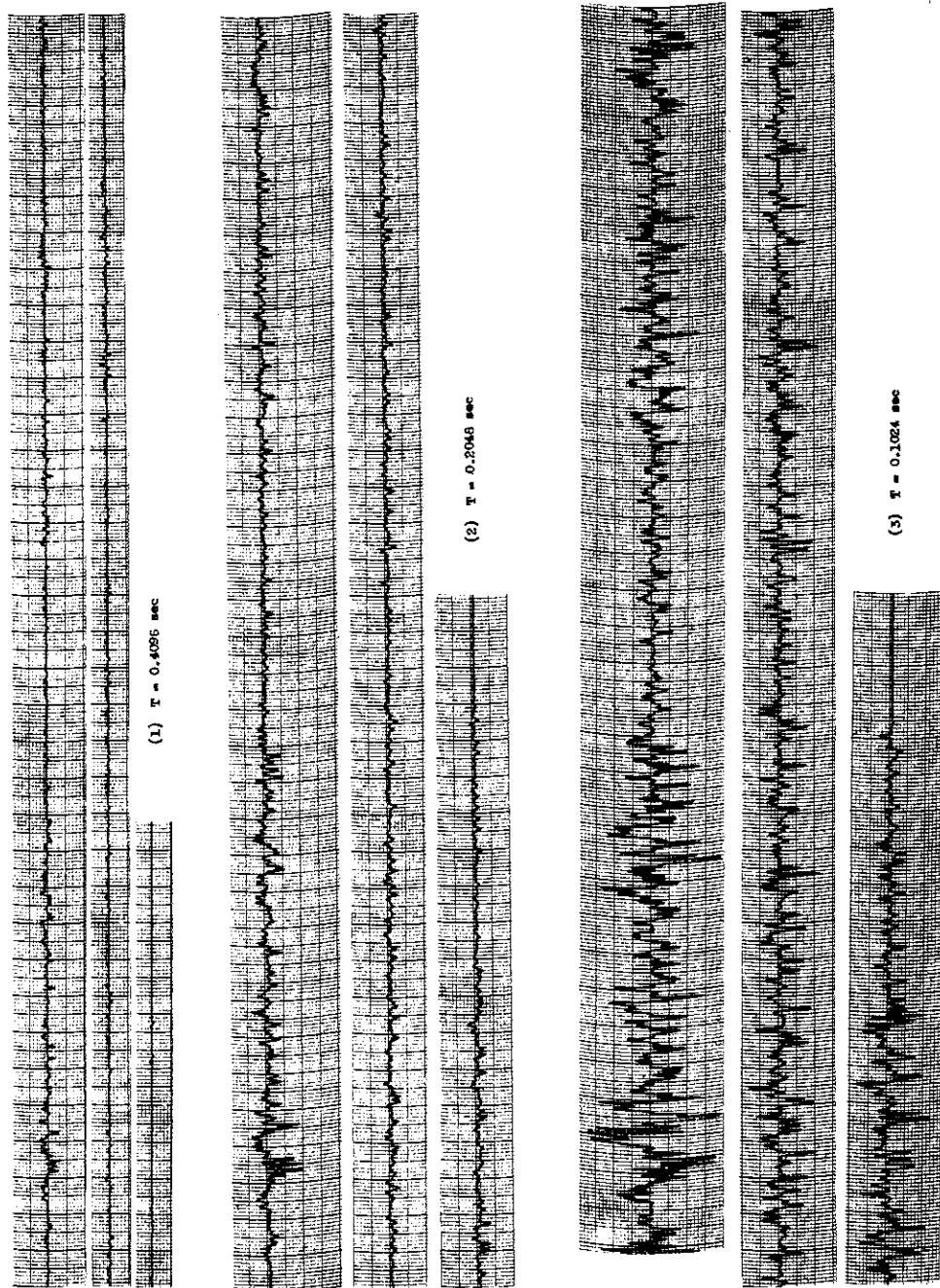


Fig. 11. The output acceleration picked up on the vibrating table (T is the time constant of the incomplete integral used to make the input displacement).

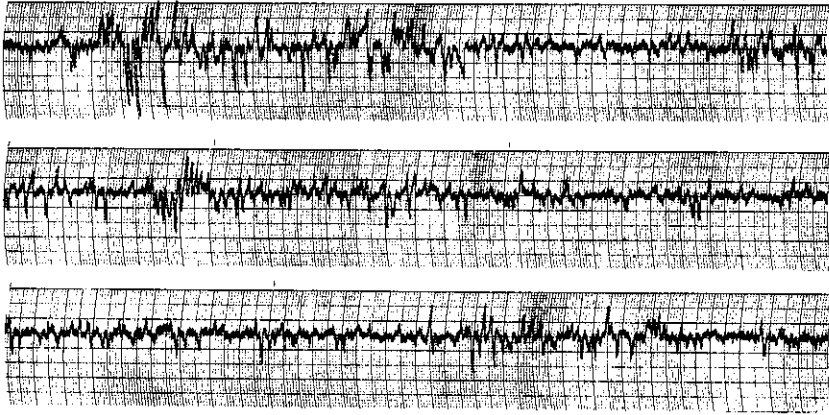


Fig. 12. Enlarged graph of Fig. 11 (1).

3.10 デジタル、アナログ計算機による不完全積分で得られた変位データをデータレコーダに記録し、それを入力として加振機を動かし、その出力加速度をとった結果が図-11である。

このグラフはあまりEl Centro地震の加速度と似ていない。「どうやら似ていないこともないですね、まあ安心しました。」と言う三菱重工の村田氏の言が正直なところであろう。

加速度制御の変位入力としては、時定数0.4秒のものが波形を一番くずしていないはずであるが、これは変位の大きな動きを ± 1 voltに納めた関係から、出力加速度が最も小さく、 ± 0.1 volt程度の記録しか得られなかった。図-12はこの ± 0.1 voltの出力をA/D変換し(有効数値3ビット程度)、これを計算機で拡大しD/A変換してペンレコーダに出したもので、全体にのっている高周波振動はA/D変換の際の一番下のビットのふらつきの現われである。

時定数0.1秒の不完全積分は、波形をかなりくずしている訳であるが、この入力に対しては振動台はよくゆれ、出力加速度はきれいに出来た。振動台の変位の幅が限られており、一方出力加速度に対しては、波形の再現性ととも、大きな値の加速度が出ることも要求されているのだから、波形がいくらかくずれても、不完全積分の時定数を小さくするのはやむを得ないであろう。

3.11 図-11に示すように出力加速度がEl Centroの加速度に似なかった原因は、この振動が低周波振動であることによると思われる。元来、この加振機は20%あたりの高周波に敏感

なように作ってあるために、低周波振動にかえて適していないことは、不規則振動入力による実験にも現われている。

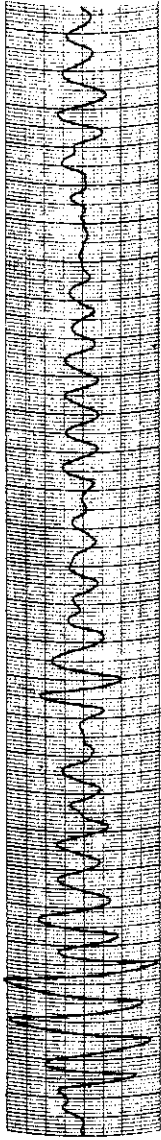
4. 出力加速度の二次遅れ系に対する効果

4.1 加速度制御実験における出力加速度は、不幸にして元来の加速度に似ていなかったけれども、似ているか似ていないかというのは、何かの観点からの評価によるのであって、評価の基準によって、答は大きく相異なる。

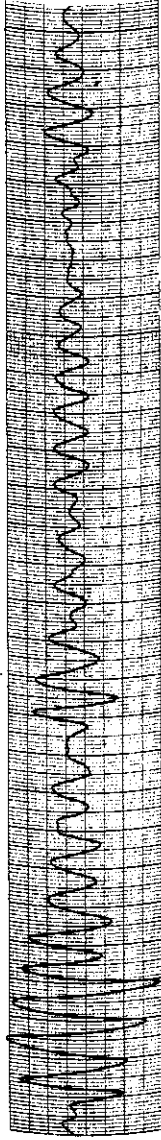
たとえば低周波ノイズを入力として位置制御をした場合のように、変位としては似ていても、速度、加速度としては似ていないこともある。シンクロスコープで見ると大きなひげがあっても、ペンレコーダでは出て来ないこともあるし、加振機への入力変位の場合のように、変位の微小な不連続変化によって、加振機は大音響を発生してゆれるという例もある。われわれがものを観測する場合、結局何らかのフィルタを通して観測することになるので、大切なものはなるべくフィルタをかけないことではなくて、目的に適したフィルタをかけることではあるまいか。

4.2 われわれの目的は振動台にものをのせてゆらせることである。したがってもののゆれ方で評価するのも一つの方法である。ペンレコーダのペンを振らせないひげならば無いと同じと考えるたぐいである。この観点から次の計算が行なわれた。以下の計算は沢田健吉氏の要望によるものである。

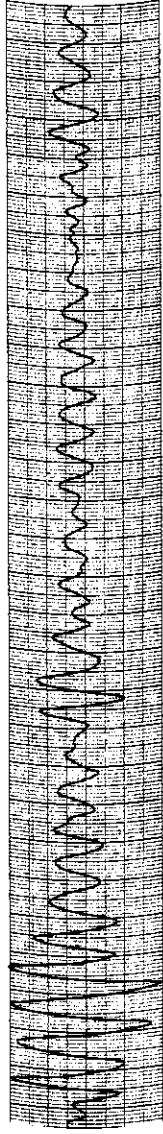
4.3 振動台でゆらすものとして二次系を考え、



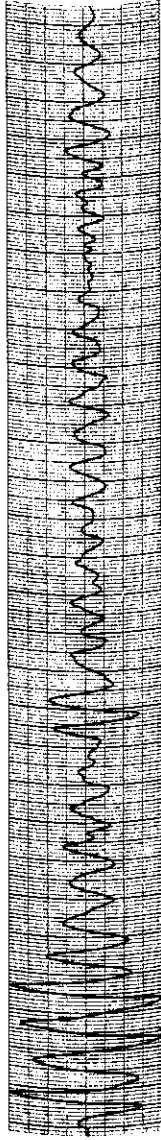
(1) Acceleration of El Centro earthquake.



(2) Acceleration picked up on the vibrating table when the input displacement is derived by the incomplete integral of time constant 0.4026 sec.



(3) Acceleration picked up on the vibrating table when the input displacement is derived by the incomplete integral of time constant 0.2043 sec.



(4) Acceleration picked up on the vibrating table when the input displacement is derived by the incomplete integral of time constant 0.1024 sec.

Fig. 13-1. The obtained output after the operation of second-order lag system $1/(p^2+2h\omega p+\omega^2)$ on the acceleration of El Centro earthquake and of the vibrating table in the experiment, where $h = 0.1$ and $\omega = 2\pi$.

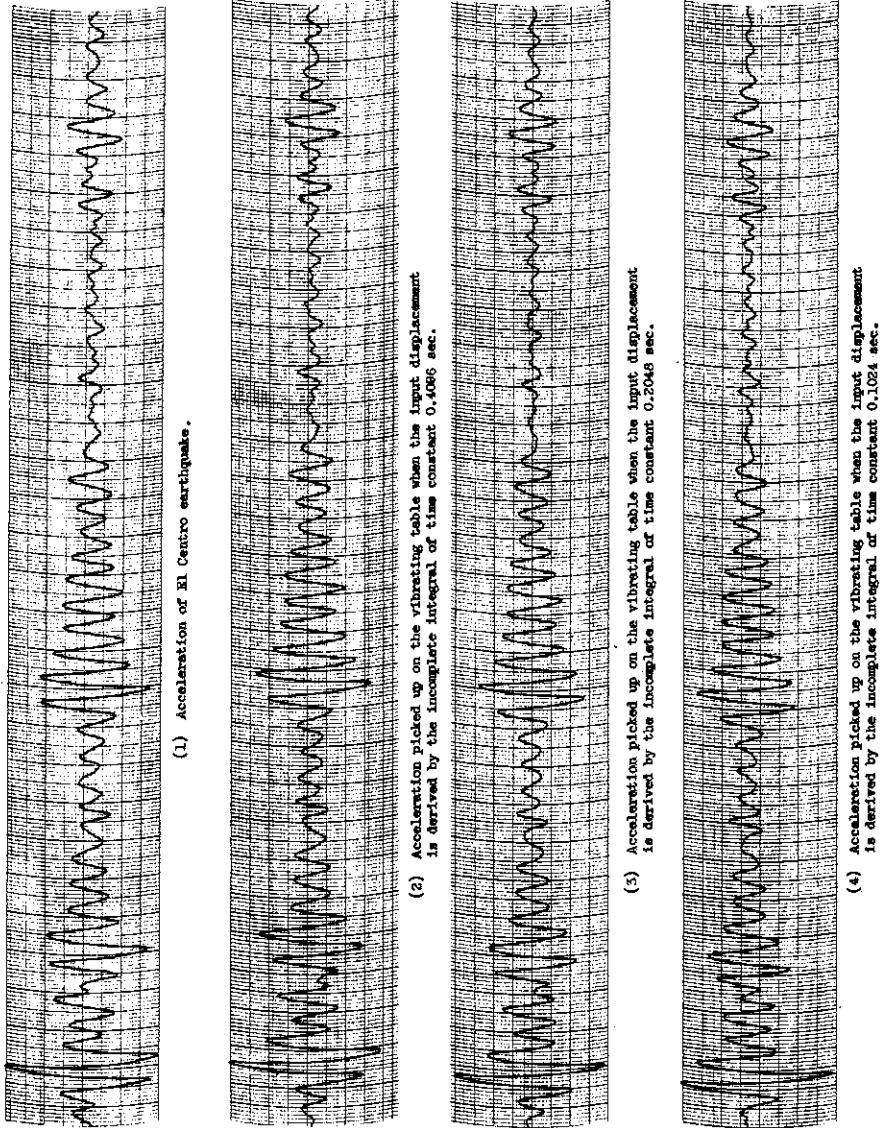
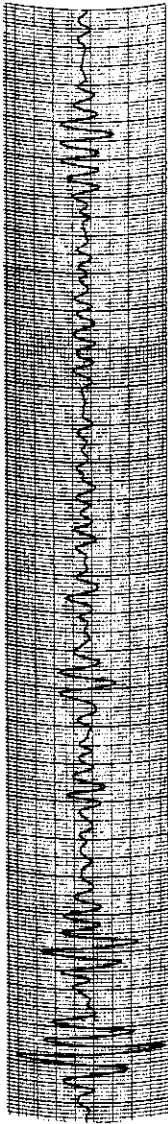
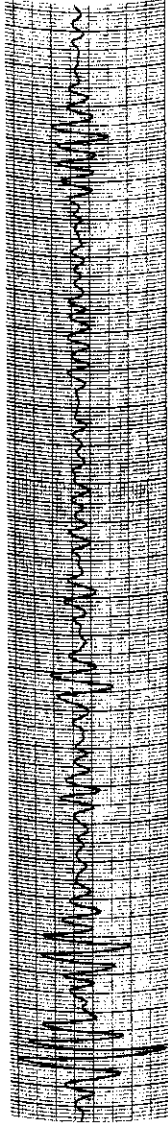


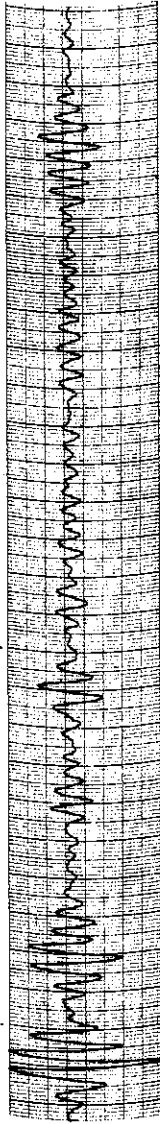
Fig. 13-2. The obtained output after the operation of second-order lag system $1/(p^2+2h\omega p+\omega^2)$ on the acceleration of El Centro earthquake and of the vibrating table in the experiment, where $h = 0.1$ and $\omega = 3\pi$.



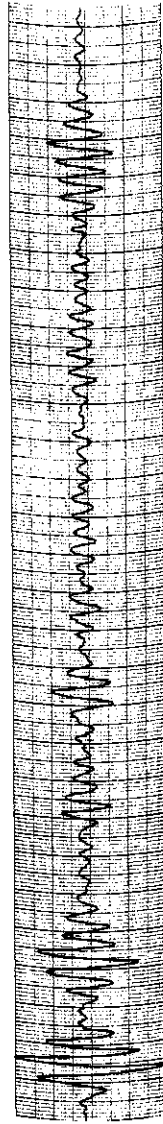
(1) Acceleration of El Centro earthquake.



(2) Acceleration picked up on the vibrating table when the input displacement is derived by the incomplete integral of time constant 0.4096 sec.



(3) Acceleration picked up on the vibrating table when the input displacement is derived by the incomplete integral of time constant 0.2048 sec.



(4) Acceleration picked up on the vibrating table when the input displacement is derived by the incomplete integral of time constant 0.1024 sec.

Fig. 13-3. The obtained output after the operation of second-order lag system $1/(p^2+2h\omega p+\omega^2)$ on the acceleration of El Centro earthquake and of the vibrating table in the experiment, where $h = 0.1$ and $\omega = 4\pi$.

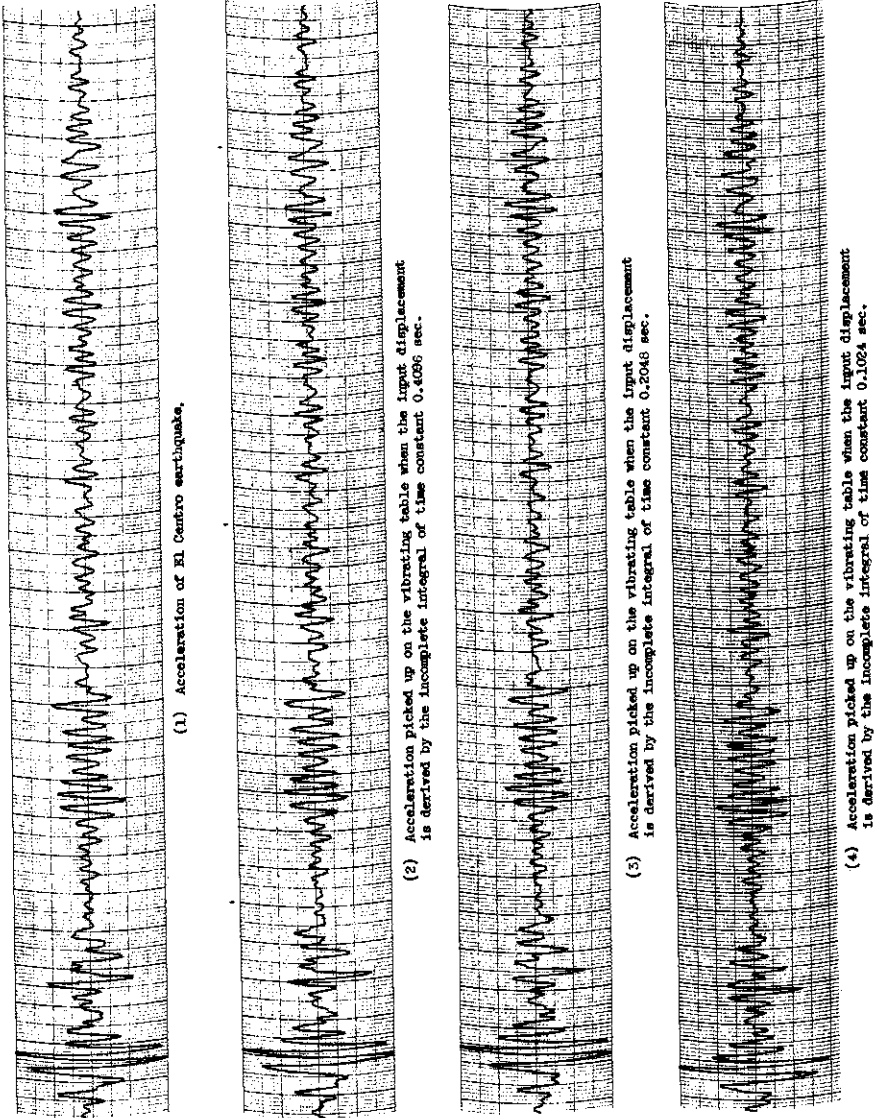
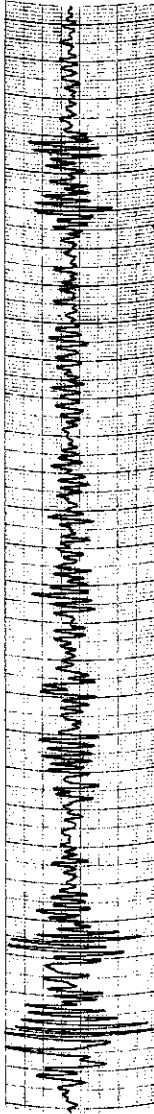
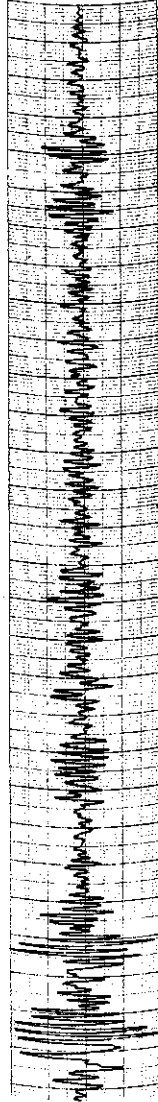


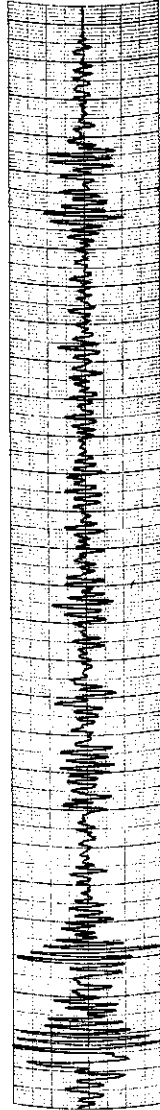
Fig. 13-4. The obtained output after the operation of second-order lag system $1/(p^2+2h\omega p+\omega^2)$ on the acceleration of El Centro earthquake and of the vibrating table in the experiment, where $h = 0.1$ and $\omega = 6\pi$.



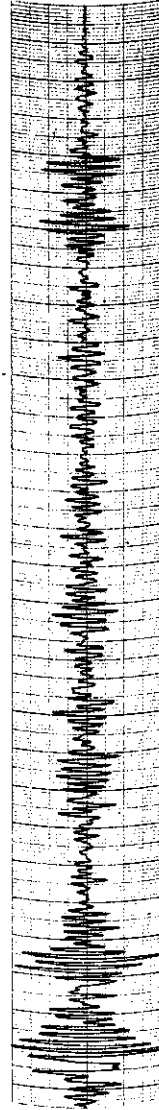
(1) Acceleration of El Centro earthquake.



(2) Acceleration picked up on the vibrating table when the input displacement is derived by the incomplete integral of time constant 0.456 sec.



(3) Acceleration picked up on the vibrating table when the input displacement is derived by the incomplete integral of time constant 0.3046 sec.



(4) Acceleration picked up on the vibrating table when the input displacement is derived by the incomplete integral of time constant 0.1024 sec.

Fig. 13-5. The obtained output after the operation of second-order lag system $1/(p^2+2h\omega p+\omega^2)$ on the acceleration of El Centro earthquake and of the vibrating table in the experiment, where $h = 0.1$ and $\omega = 10\pi$.

この二次系が El Centro 地震の加速度でゆれた場合と、振動台の出力加速度でゆれた場合とを比較し、両者が似ていれば加速度制御は成功というわけである。

4.4 二次遅れ系は方程式

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2x = -Z$$

で表わされる振動系で、右辺に置かれた外力 Z により、 x がどのように動くかを知る問題である。演算子でかけば

$$x = (1/(p^2 + 2h\omega p + \omega^2)) \cdot Z$$

であり、応答関数

$$h(t) = e^{-h\omega t} \sin \omega \sqrt{1-h^2} t$$

による一次変換である(数係数を省略した)。

この問題はアナログ計算機で二次遅れフィルタを作り、テープレコーダからの入力を変換すればよいのだから、きわめて容易であるが、数値設定の正確さと、正確な再現性を考慮して、ディジタル計算機で行なうことにした。

4.5 二次遅れ系の計算をディジタルで行なうには、次のようにすればよい。微分方程式は定差方程式になるから、2階の微分方程式は次の形にかける。

$$x_n = 2ax_{n-1} - bx_{n-2} + cZ_n$$

外力 $\{Z_n\}$ が無いとき、この定差方程式は

$$x_n = t^n$$

と置いて解ける。 t は

$$t^2 - 2at + b = 0$$

を満足するから、

$$t = a \pm \sqrt{a^2 - b}, \quad a^2 \geq b$$

$$t = a \pm i\sqrt{b - a^2}, \quad a^2 < b$$

$a^2 < b$ のときは

$$r = |a + i\sqrt{b - a^2}| = \sqrt{b}$$

$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{b - a^2}/a = \sin^{-1} a/\sqrt{b}$$

と置けば

$$t = r e^{\pm i\theta}$$

となり、 $x_n = 2ax_{n-1} - bx_{n-2}$ の一般解は

$$x_n = c_1 (r e^{i\theta})^n + c_2 (r e^{-i\theta})^n$$

または

$$x_n = r^n (c'_1 \cos n\theta + c'_2 \sin n\theta)$$

で与えられる。

外力 $\{Z_n\}$ が与えられたときは、 $\{Z_n\}$ を $\{\dots, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$ の形の時系列に分解して考えればよい。とくに $Z_0 = 1, Z_n = 0 (n \neq 0)$ の場合を考えれば(これは外力が δ 関数の場合に当たる)、それに対する解は

$$h_n \begin{cases} = r^n \sin(n+1)\theta / \sin\theta & n \geq 0 \\ = 0 & n < 0 \end{cases}$$

で与えられる。これが応答関数に当たるものである。

外力 $\{Z_n\}$ に対する解は、上の数列 $\{h_n\}$ に Z_n を掛け、ずらして和をとった形で表わされる。

$$x_n = 1/\sin\theta \sum_{i=0}^{\infty} Z_{n-i} r^i \sin(i+1)\theta$$

または

$$\begin{aligned} x_n &= 1/r \sin\theta \sum_{i=0}^{\infty} Z_{n-i} r^{i+1} \sin(i+1)\theta \\ &= 1/r \sin\theta \sum_{j=1}^{\infty} Z_{n+1-j} r^j \sin j\theta \end{aligned}$$

2番目の式で見ると $1/r \sin\theta$ は定数にすぎないとみて、応答関数は $r^n \sin n\theta$ の形であることがわかる。

4.6 二次遅れ系 $1/(p^2 + 2h\omega p + \omega^2)$ を時間間隔 Δt の時系列で取り扱うには、応答関数

$$h(t) = e^{-h\omega t} \sin \omega \sqrt{1-h^2} t$$

を Δt ごとに抽出した系列

$$h_n = e^{-h\omega n \Delta t} \sin \omega \sqrt{1-h^2} n \Delta t$$

を考えればよい。これを $r^n \sin n\theta$ に対応させればよいから、

$$r = e^{-h\omega \Delta t}$$

$$\theta = \omega \sqrt{1-h^2} \Delta t$$

とすればよい。 $r = \sqrt{b}, \theta = \sin^{-1}(a/\sqrt{b})$

であるから、

$$\sqrt{b} = r = e^{-h\omega\Delta t}$$

$$a/\sqrt{b} = \sin\theta = \sin\omega\sqrt{1-h^2}\Delta t$$

によって a 、 b を定めればよい。

すなわち

$$b = e^{-2h\omega\Delta t}, \quad a = \sqrt{b} \sin\omega\sqrt{1-h^2}\Delta t$$

このようにして定めた a 、 b を用い、

$$x_n = 2ax_{n-1} - bx_{n-2} + Z_n$$

により $\{Z_n\}$ から $\{x_n\}$ を算出すれば、入力

$\{Z_n\}$ が与えられた二次遅れ系により $\{x_n\}$

に変換される。

4.7 沢田氏から要望された値は $h = 0.1$ 、 $\omega = 2\pi \sim 10\pi$ 、周波数で言えば 1%~5% というものであった。

計算は $h = 0.1$ 、 $\omega = 2\pi, 3\pi, 4\pi, 6\pi, 10\pi$ (周波数で 1%, 1.5%, 2%, 3%, 5%) の 5通りが行なわれた。

入力 $\{Z_n\}$ として用いたのは El Centro 地震の加速度、および加速度制御をした場合の振動台の出力加速度である。

加速度制御の際に用いられた入力変位が 3種類あり (不完全積分の時定数が約 0.4秒, 0.2秒, 0.1秒の3種類)、出力加速度を測った位置が 2カ所あったから、出力加速度は全部で 6通りであった。これに El Centro を加えて、7通りの加速度について、5通りの二次遅れ演算を施した。

図-13は結果の一部を示したもので、いずれの場合についても、出力加速度に二次遅れを施したものは、El Centro そのものに二次遅れを施したものと、きわめてよく似ている。

この点で加速度制御は成功したとすることができる。