

## 雪えくぼのパターン形成 II

納 口 恭 明\*

国立防災科学技術センター雪害実験研究所

### Formation of Dimple-pattern on Snow II

By

Yasuaki Nohguchi

*Institute of Snow and Ice Studies,*

*National Research Center for Disaster Prevention, Nagaoka, Niigata-ken, 940*

#### Abstract

Mechanism of the formation of dimple-pattern was studied theoretically. As a result, it was found that the uniform snowcover is mechanically unstable, because of saturated layer, under the condition of

$$E/\alpha gL k^* < \tanh k^*, \quad k^* = \sqrt{E_s/E} Lk$$

where  $k$  is wavenumber,  $L$  is the thickness of the snow layer,  $E, E_s$  are the coefficients of elasticity, and  $\alpha$  is a constant. This equation indicates that if  $E/\alpha gL$  is more than unity, any patterns are not formed, and that  $E/\alpha gL$  is less than unity, the patterns whose wavenumber is less than  $k_c$  are formed, which is the solution of

$$E/\alpha gL k^* = \tanh k^*.$$

These results are consistent with those of field observation of dimple-pattern. Consequently, the formation of dimple-pattern can be explained in terms of elastic instability of snowcover with saturated layer.

#### 1. 序 論

雪えくぼの形成にとって帯水層の存在は必要不可欠である。「雪えくぼのパターン形成 I」(納口, 1984)では, 観察にもとづいて, 雪えくぼのパターンの形成は, 帯水層とその下の積雪層とからなる系の弾性的不安定が原因であるという仮説をたてた。もし, 弾性的不安

---

\* 第1研究室

定のためにパターンが発生しうるならば、その凹部への水の集中による水みちの形成と雪のざらめ化の過程をとおして、そのパターンは雪えくぼのパターンとして雪面上に現われてくことになる。

本論文では、帯水層をともなう積雪が弾性的に不安定となるかどうかを理論的に検討するとともに、その発生とパターンの特徴とを明らかにする。また、このような原因で発生するパターンが、実際の雪えくぼとなって雪面上に形成されるパターンと同じものであるかどうかを、観測結果との比較により考察する。

## 2. 帯水層をともなう積雪の弾性的不安定とパターンの発生

### 2.1 一様性の安定と不安定

一般に、一様状態の安定性は、それに非一様なゆらぎを与えたときに、そのゆらぎが成長するかどうかで判断することができる。

一様な厚さの積雪に対して、止水面（帯水層とその下の積雪層との境界）に、非一様な仮想的弾性変形を与える。このとき水は止水面に沿ってより低い方に移動し、とくに凹部ほど集中する。この集中荷重が、仮想変形によって発生した積雪内の弾性的反発力に打ち勝つならば、この非一様なゆらぎはますます発達することになる。このような場合、一様性は不安定である。逆に、反発力の方が強ければ仮想変形の拘束力を取り除くと集中していた水はもとにもどされ一様状態にもどることになる。この場合は、一様性は安定である。

仮想変形を与えるかわりに、止水面上に非一様な荷重分布をゆらぎとして与えることによっても安定性を調べることができる。この非一様な荷重分布にともなって積雪は変形する。その結果として凹凸をもつ非一様な止水面が形成され、水はその凹凸に応じて分布する。つぎに、この新たな水の分布に応じて再び止水面の変位が与えられる。この過程を逐次繰り返していったときその変位が発散する場合は、一様性は不安定であり、逆の場合、すなわち収束する場合は安定である。

一様状態が不安定化した場合、そのゆらぎはパターンを形成する。

### 2.2 状況の設定

帯水層とその下の積雪層とからなる系を記述するための方程式としては、本質を見失わない程度に単純化したものを用いる。

まず、帯水層の下の積雪を、鉛直方向にのみ変位する弾性体とする。また、帯水層の効果は、積雪層の上面（止水面）における境界条件として与えることにする。

止水面の凹凸に応じた水の分布をつぎのように仮定する。 $w$ を止水面よりも上の単位面積当りの雪と水からなる柱の質量とし、その水平方向の平均を $\bar{w}$ とする。このとき $w$ の $\bar{w}$ から

のずれ  $w'$  は止水面の凹凸に応じて分布するのであるから、第1近似的に次のように表現する。

$$w' = w - \bar{w} = -\alpha (u_L - \bar{u}_L) \equiv -\alpha u'_L \quad (1)$$

ただし、 $u_L$  と  $\bar{u}_L$  は鉛直上向きの変位成分  $u$  の止水面での値とその水平方向の平均である。 $\alpha$  は比例定数であり、帯水層内の水の量や浸透などに関係するものであるが、ここではむしろ現象論的な定数と考える。

### 2.3 2次元1層の平地積雪

はじめに簡単な例として2次元の平地積雪の場合について、仮想変形による安定性の検討をする\*。

止水面下の積雪は密度  $\rho$ 、厚さ  $L$  の一様均質な層とし、底面では変形しない固い物体と接しているものとする。また、 $z$  を鉛直上向き、 $y$  を水平方向とし、 $u$  を  $z$  方向の変位とする(図1)。このとき方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} &= \rho g \\ \sigma_z &= E \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_{zy} = E_s \frac{\partial u}{\partial y} \\ u &= 0 \quad (z = 0) \\ u &= u_L \quad (z = L) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。ただし  $E \cdot E_s$  はそれぞれ圧縮とせん断に関係する弾性定数であり、 $g$  は重力加速度である。

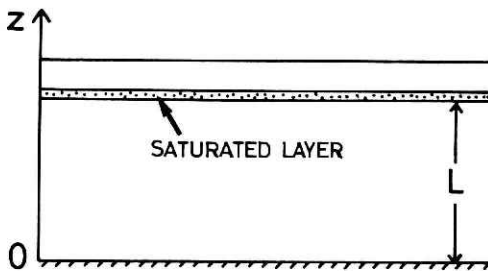


図1 1層平地積雪。

Fig. 1 One-layered snowcover on plain.

\*仮想的な荷重による安定性の検討は、付録を参照

いまここで問題としなければならないのは、水平方向に平均した一様成分を除く残りの非一様成分である。したがって変位  $u$  を一様成分  $\bar{u}$  と非一様成分  $u'$  とにわけると

$$u = \bar{u}(z) + u'(z, y) \quad (3)$$

一様成分  $\bar{u}$  に関しては次式

$$\left. \begin{aligned} E \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} &= \rho g \\ \bar{u} &= 0 \quad (z=0) \\ \bar{u} &= \bar{u}_L \quad (z=L) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

を満すので、(2)・(3)・(4)式から  $u'$  に関する方程式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + E_s \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} &= 0 \\ u' &= 0 \quad (z=0) \\ u' &= u'_L \quad (z=L) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

いまゆらぎとして振幅  $\delta$ 、波数  $k$  (波長  $\lambda = 2\pi/k$ ) の非一様な仮想変形

$$u'_L = \delta \sin ky \quad (6)$$

に対する安定性を調べよう。

(5)・(6)式に対する解を求めるために

$$u' = a(z) \sin ky \quad (7)$$

として(5)式に代入すると  $a$  に関する方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dz^2} &= \frac{E_s}{E} k^2 a \\ a &= 0 \quad (z=0) \\ a &= \delta \quad (z=L) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

これから  $a$  を求めると

$$a = \delta \frac{\sinh \sqrt{E_s/E} k z}{\sinh \sqrt{E_s/E} k L} \quad (9)$$

となる。したがって  $u'$  は(7)式から

$$u' = \delta \frac{\sinh \sqrt{E_s/E} k z}{\sinh \sqrt{E_s/E} k L} \sin ky \quad (10)$$

となる。

このとき止水面 ( $z = L$ ) における応力  $\sigma'_z = E \partial u' / \partial z = \sigma'_{zL}$  を求めるとつぎのようになる。

$$\sigma'_{zL} = k \delta \sqrt{EE_s} \coth \sqrt{\frac{E_s}{E}} k L \sin ky \quad (11)$$

一方、この非一様な仮想変形にもとづく止水面上の水の分布は(1)式から

$$w' = -\alpha \delta \sin ky \quad (12)$$

となる。

このとき、このゆらぎに対する安定・不安定は次式によって判断することができる。すなわち、

$$|\sigma'_{zL}| > |w'g| \quad (13)$$

ならば、仮想変形によっていったん集中した水は、積雪の内部応力による反発力のために再び一様状態にもどされる。したがって、一様状態は安定であり、そのゆらぎに対応したパターンは発生しない。

一方

$$|\sigma'_{zL}| < |w'g| \quad (14)$$

ならば、積雪の反発力に打ち勝って水はますます集中し、その非一様性は発達する。したがって、一様状態はそのゆらぎに対して不安定であり、それに対応したパターンが発生する。

したがって(11)・(12)式からこの条件はつぎのようになる。すなわち、

$$\frac{E}{\alpha g L} k^* > \tanh k^* \quad (15)$$

ならば、このゆらぎに対して一様状態は安定であり、

$$\frac{E}{\alpha g L} k^* < \tanh k^* \tag{16}$$

ならば、一様状態は不安定であり、ゆらぎとして与えた波長をもつパターンが発生する。ただし

$$k^* = \sqrt{E_s/E} L k \tag{17}$$

である。

図2によって(15)・(16)式の意味を考える。無次元パラメータ  $E/\alpha g L$  が1よりも大きい場合、 $k^*$  の値によらず常に(15)式が成りたつ。すなわちどのような波長のゆらぎに対しても一様状態は安定であり、パターンは発生しない。

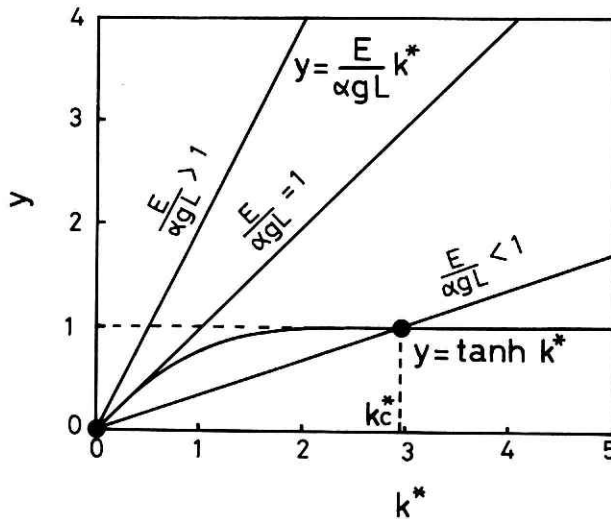


図2  $E/\alpha g L$  の減少による不安定の発生。  
Fig. 2 Occurrence of instability by change in  $E/\alpha g L$ .

一方、 $E/\alpha g L$  が1よりも小さい場合、次式

$$\frac{E}{\alpha g L} k_c = \tanh k_c \tag{18}$$

の解  $k_c$  よりも小さな波数 ( $\lambda_c = 2\pi/k_c$  よりも大きな波長) のゆらぎに対して(16)式が成りたつ。すなわち、 $\lambda_c$  よりも大きな波長のゆらぎに対して一様状態は不安定となり、それに対応したパターンが発生する。

$k^*$  と  $E/\alpha g L$  からなるパラメータ空間上の安定・不安定の領域を図3に示す。

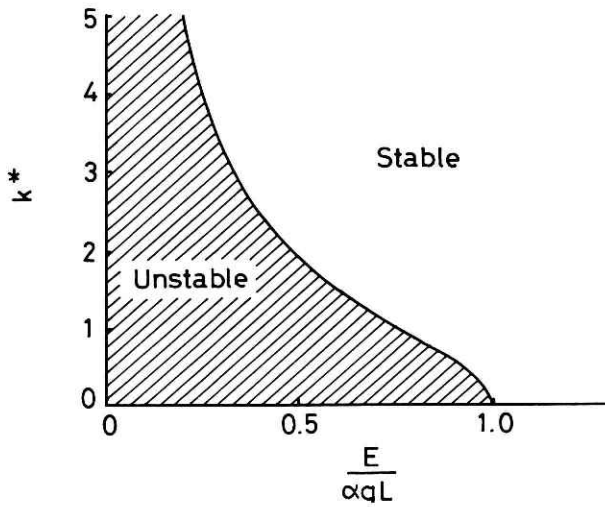


図3 パラメータ空間における不安定領域.  
Fig. 3 Diagram of stability on parameter space.

(15)・(16)式の安定・不安定の式には、仮想変形の大きさ  $\delta$  は関係していない。これは、ゆらぎがいくら微小であっても、(16)式が満たされるようなものであれば、それは拡大されパターン形成の出発点となることを意味する。また逆に、ゆらぎがいくら大きくても、(15)式を満たす場合はパターンは発生しないことになる。

**パターン発生条件**

一般の仮想変形は(6)式の重ね合せとして表現することができる。自然状態で積雪に与えられるゆらぎは、さまざまな波長をもつ微小な仮想変形の重ね合わされたものと考えられるから、無次元パラメータ  $E / \alpha g L$  が1よりも小さければなんらかのパターンが発生することになる。この意味で、

$$\frac{E}{\alpha g L} < 1 \tag{19}$$

は、一様状態の不安定条件、あるいはパターンの発生条件となる。

このパラメータは弾性定数  $E$  が大きくなるほど、あるいは積雪層の厚さ  $L$  が小さくなるほど大きくなる。すなわち、雪がしまって固くなったり、積雪層が薄かったりすると帯水層が形成されてもパターンは発生しないことを意味している。

パターンの波長

不安定条件(19)式が満たされるとき発生するパターンはゆらぎとして与えられる仮想変形の成分に依存している。このときパターンとして発生を許されるのは一定波長  $\lambda_c$  よりも長い波長をもった成分だけである。この制約は、与えられるゆらぎが無秩序なものであっても、発生するパターンにはある程度の秩序が存在するという結果をもたらす。また、地形パターンのような秩序をもったものがゆらぎとして与えられるときは、波長に関するこの条件は地形パターンが表面に現われてくるかどうかを決定することになる。雪えくぼのパターンにおいて、 $\lambda_c$ の存在は、くぼみの間隔が積雪の状態から決まるある一定距離以上には近づかないことを意味する。

図4は無次元化した波長  $\lambda_c$  と、同じく無次元化した積雪層の厚さ  $L$  の関係である。不安定のはじまる点 ( $E/\alpha g L = 1$ ) の近傍を除いて、波長  $\lambda_c$  は積雪層の厚さ  $L$  には依存していないことがわかる。

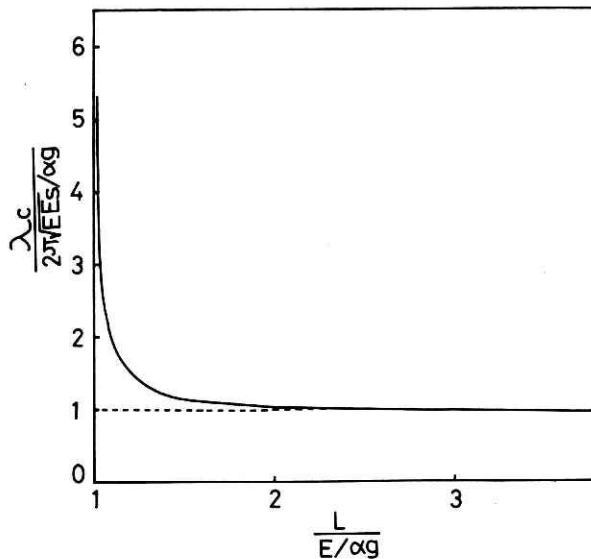


図4 波長と積雪層の厚さの関係。  
Fig. 4 Wavelength vs. thickness of snow layer.

一方、図5はそれぞれ無次元化された波長  $\lambda_c$  と弾性定数  $E$  の関係である。この場合は弾性定数  $E$  が大きくなるにつれて波長も大きくなっていくのがわかる。とくに  $E/\alpha g L \ll 1$  の場合、波長  $\lambda_c$  はつぎのように簡単に表わすことができる。

$$\lambda_c = \frac{2\pi\sqrt{E E_s}}{\alpha g} \quad \left( \frac{E}{\alpha g L} \ll 1 \right) \quad (20)$$



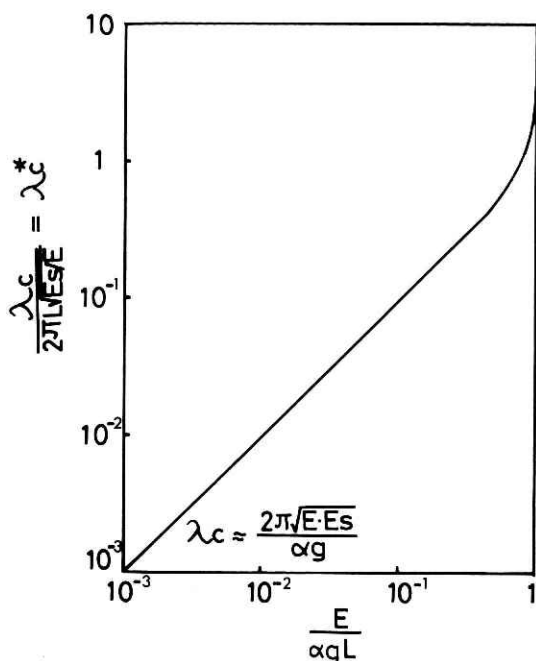


図5 波長と弾性定数の関係.

Fig. 5 Wavelength vs. coefficient of elasticity.

#### 2.4 3次元1層の平地積雪

より一般化して、3次元1層の平地積雪を考えよう。この場合(2)式に対応する方程式はつぎのとおりである。

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \rho g \\
 & \sigma_z = E \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = E_s \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{zy} = E_s \frac{\partial u}{\partial y} \\
 & u = 0 \quad (z = 0) \\
 & u = u_L \quad (z = L)
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

このとき非一様成分  $u'$  についての方程式は

$$\left. \begin{aligned}
 & E \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + E_s \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) = 0 \\
 & u' = 0 \quad (z = 0) \\
 & u' = u'_L \quad (z = L)
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となる。

一般に任意の仮想変形は

$$u'_L = \delta \sin(k_x x + k_y y) \quad (23)$$

の重ね合せとして表わせる。この場合もパターンの発生条件は2次元1層の平地積雪と同じく(19)式で表わされる。

(23)式は単独では図6のような1次元パターンを表わしている。ふつう平地積雪において、自然のゆらぎに異方性はないから、1次元パターンは考えられないが、畑の畝(納口, 1984)のような1次元パターンがゆらぎとして強制的に与えられる場合には、このようなパターンも発生する。

このとき発生する1次元パターンの波長の下限は(18)式から得られる $\lambda_c$ に他ならない。

ふつう平地積雪の雪面上に現われる雪えくぼは2次元パターンである。いま単純な2次元パターンとしてつぎのような

$$u'_L = \delta \sin k_x x \sin k_y y \quad (24)$$

仮想変形を与えた場合の安定を考えよう。

この場合、パターンは図7のとおりであり、凹部の点の空間密度を $f$ とすると、

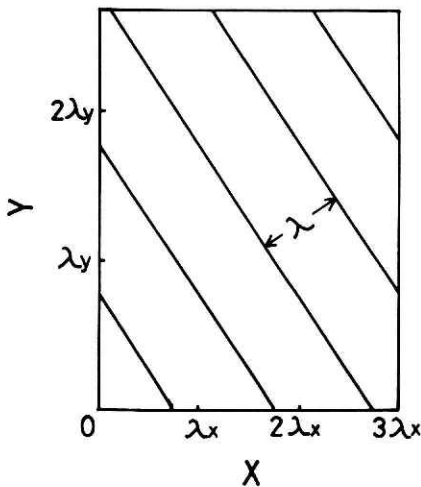


図6 1次元パターン。

Fig. 6 One-dimensional pattern.

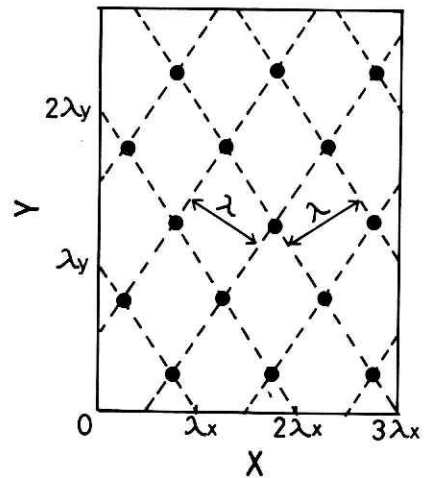


図7 2次元パターン。

Fig. 7 Two-dimensional pattern.

$$f = \frac{k}{2\pi^2} \left( \frac{1}{k_x^2} + \frac{1}{k_y^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (25)$$

である。ただし、 $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  である。

(24) 式の仮想変形に対する解も

$$u' = a(z) \sin k_x x \sin k_y y \quad (26)$$

とにおいて、 $a$  の方程式をとおして求めることができる。

$$u' = \delta \frac{\sinh \sqrt{E_s/E} k z}{\sinh \sqrt{E_s/E} k L} \sin k_x x \sin k_y y \quad (27)$$

これから、このゆらぎに対する不安定の条件を求めると(16)式と同じ式

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{\alpha g L} k^* &< \tanh k^* \\ k^* &= \sqrt{E_s/E} L \cdot \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

が得られる。この場合、凹部の点の空間密度  $f$  の上限  $f_c$  は、 $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$  であつ  $k_x = k_y$  のときに得られる。このとき  $f$  は

$$f_c = \frac{k_c^2}{4\pi^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} \quad (29)$$

となる。空間密度  $f$  の逆数の平方根を2次元パターンの波長と呼ぶことにすると、これは1次元パターンの波長の上限  $\lambda_c$  と一致する。

## 2.5 斜面積雪

自然の平地積雪には異方性はないので形成されるパターンは2次元的であるが、斜面積雪の場合は帯水層中の水が斜面に沿って下方へ流れる一様成分があるため形成されるパターンは異方性をもつ1次元パターンとなる。したがって斜面上のパターン発生は、平地積雪における1次元パターンの安定・不安定の問題と同じである。ただしこの場合、重力加速度  $g$  と積雪層の厚さ  $L$  は斜面垂直成分をとって  $g \cos \theta$ ,  $L \cos \theta$  ( $\theta$  は斜面の勾配) としなければならない。

したがって斜面積雪の場合、パターンの発生条件は

$$\frac{E}{\alpha g L \cos^2 \theta} < 1 \quad (30)$$

となる。

(30)式からわかるように、平地ではパターンが発生する場合 ( $E/\alpha g L < 1$ ) でも

$$\theta_c = \cos^{-1} \sqrt{\frac{E}{\alpha g L}} \quad (31)$$

なる  $\theta_c$  よりも大きな勾配 ( $\theta > \theta_c$ ) をもつ斜面ではパターンは発生しないことになる (図8)。

斜面上にパターンが発生する場合の波数の上限  $k_{sc}$  は

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{\alpha g L \cos^2 \theta} k_{sc}^* &= \tanh k_{sc}^* \\ k_{sc}^* &= \sqrt{E_s/E} L k_{sc} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

から求められる。とくに、 $E/\alpha g L \ll 1$  の場合、波長  $\lambda_{sc} = 2\pi/k_{sc}$  は、

$$\lambda_{sc} = \frac{2\pi \sqrt{EE_s}}{\alpha g L \cos \theta} = \frac{\lambda_c}{\cos^2 \theta} \quad (33)$$

となる (図9)。したがって斜面積雪の場合、波長  $\lambda_{sc}$  は勾配  $\theta$  が大きくなるにつれて大きくなるが、図9からもわかるとおり、 $E/\alpha g L \ll 1$  の場合には  $30^\circ$  くらいの勾配の斜面でも平地の波長  $\lambda_c$  とそれほど大差はない。

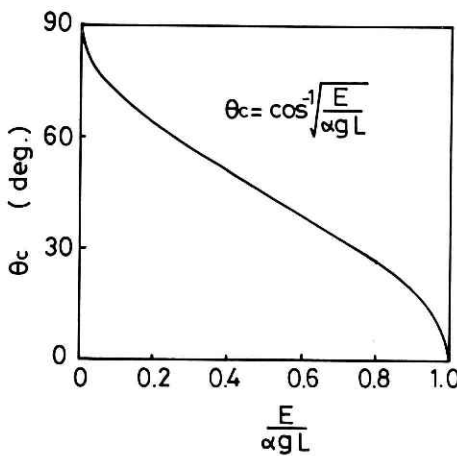


図8 斜面積雪における不安定。  
Fig. 8 Instability of snowcover on slope.

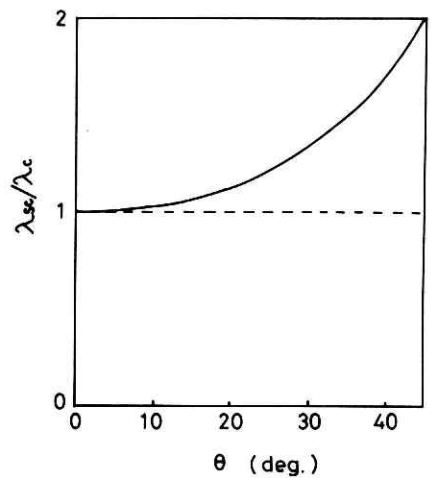


図9 斜面勾配と波長の関係。  
Fig. 9 Wavelength vs. slope

2.6 2次元2層平地積雪

これまで問題とする積雪層を1層と考え、その下面では固い物体と接しているものとして扱ってきた。実際の積雪は多くの層からなっており、時には下の雪が固くてほとんど変形を無視できるものの場合もあるが、そうでない場合もある。ここでは、パターン発生のうえでの下の層の影響を調べるために、2層からなる2次元平地積雪についてこれまでと同様の検討をする。

図10に示すように厚さ  $L_1 \cdot L_2$ 、密度と弾性定数が  $\rho_1 \cdot \rho_2$ 、 $E_1 \cdot E_2$ 、 $E_{s1} \cdot E_{s2}$  である2つの層を考える。  $u_1 \cdot u_2$  をそれぞれの変位とすると方程式はつぎのとおりである。

$$\left. \begin{aligned} E_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + E_{s1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= \rho_1 g \\ E_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + E_{s2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} &= \rho_2 g \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

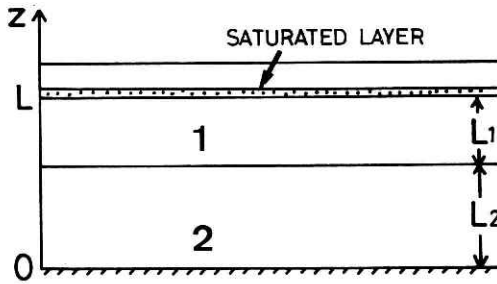


図10 2層平地積雪。

Fig. 10 Two-layered snowcover on plain.

また境界条件は

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= 0 && (z = 0) \\ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} &= E_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad u_1 = u_2 && (z = L_2) \\ u_1 &= u_{1L} && (z = L_1 + L_2 \equiv L) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

である。

このとき  $u_1 \cdot u_2$  の非一様成分  $u'_1 \cdot u'_2$  については次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 \frac{\partial^2 u'_1}{\partial z^2} + E_{s1} \frac{\partial^2 u'_1}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 E_2 \frac{\partial^2 u'_2}{\partial z^2} + E_{s2} \frac{\partial^2 u'_2}{\partial y^2} &= 0 \\
 u'_2 &= 0 \quad (z=0) \\
 E_1 \frac{\partial u'_1}{\partial z} &= E_2 \frac{\partial u'_2}{\partial z}, \quad u'_1 = u'_2 \quad (z=L_2) \\
 u'_1 &= u'_{1L} \quad (z=L)
 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ただし一様成分  $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2$  は

$$\left. \begin{aligned}
 E_1 \frac{d^2 \bar{u}_1}{d z^2} &= \rho_1 g, \quad E_2 \frac{d^2 \bar{u}_2}{d z^2} = \rho_2 g \\
 \bar{u}_2 &= 0 \quad (z=0) \\
 E_1 \frac{d \bar{u}_1}{d z} &= E_2 \frac{d \bar{u}_2}{d z}, \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \quad (z=L_2) \\
 \bar{u}_1 &= \bar{u}_{1L} \quad (z=L)
 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

である。

止水面  $z=L$  における仮想変形として(6)式と同じく

$$u'_{1L} = \delta \sin ky \quad (38)$$

を与える。このときの解も、1層の積雪の場合と同様に

$$\left. \begin{aligned}
 u'_1 &= a_1(z) \sin ky \\
 u'_2 &= a_2(z) \sin ky
 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

と置いて、 $a_1 \cdot a_2$  の方程式

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2 a_1}{d z^2} &= \frac{E_{s1}}{E_1} k^2 a_1, \quad \frac{d^2 a_2}{d z^2} = \frac{E_{s2}}{E_2} k^2 a_2
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 0 && (z=0) \\ E_1 \frac{d a_1}{d z} &= E_2 \frac{d a_2}{d z}, \quad a_1 = a_2 && (z=L_2) \\ a_1 &= \delta && (z=L) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

から求める。

このとき  $a_1$  はつぎのようになる。

$$a_1 = \delta \frac{\sqrt{E_2 E_{S2}} C_2 \sinh \sqrt{\frac{E_{S1}}{E_1}} k (z - L_2) + \sqrt{E_1 E_{S1}} S_2 \cosh \sqrt{\frac{E_{S1}}{E_1}} k (z - L_2)}{\sqrt{E_2 E_{S2}} C_2 S_1 + \sqrt{E_1 E_{S1}} S_2 C_1}$$

$$C_1 = \cosh \sqrt{\frac{E_{S1}}{E_1}} k L_1, \quad C_2 = \cosh \sqrt{\frac{E_{S2}}{E_2}} k L_2 \quad (41)$$

$$S_1 = \sinh \sqrt{\frac{E_{S1}}{E_1}} k L_1, \quad S_2 = \sinh \sqrt{\frac{E_{S2}}{E_2}} k L_2$$

したがって  $z=L$  における応力  $\sigma'_{z1} = E_1 \partial u'_1 / \partial z = \sigma'_{z1L}$  は

$$\sigma'_{z1L} = E_1 \delta \sin k y \frac{\sqrt{\frac{E_2 E_{S2} E_{S1}}{E_1}} k C_2 C_1 + E_{S1} k S_2 S_1}{\sqrt{E_2 E_{S2}} C_2 S_1 + \sqrt{E_1 E_{S1}} k S_2 C_1} \quad (42)$$

となる。

したがって、この仮想変形に対する不安定の条件は

$$|\sigma'_{z1L}| < |\alpha g \delta \sin k y| \quad (43)$$

から

$$\frac{E_1}{\alpha g L_1} < \frac{\xi \cosh \zeta k^* \sinh k^* + \sinh \zeta k^* \cosh k^*}{\xi \cosh \zeta k^* \cosh k^* + \sinh \zeta k^* \sinh k^*} \quad (44)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} k^* &= \sqrt{E_{S1}/E} L_1 k \\ \xi &= \sqrt{\frac{E_2 E_{S2}}{E_1 E_{S1}}} \\ \zeta &= \sqrt{\frac{E_{S2} E_1}{E_2 E_{S1}}} \frac{L_2}{L_1} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

である。

(44)式から、パターンの発生条件は

$$\frac{E_1}{\alpha g L_1} < \frac{\xi + \zeta}{\xi} = 1 + \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{L_2}{L_1} \quad (46)$$

となる。(46)式は下の層の弾性定数が上の層よりも十分に大きい場合、あるいは上の層が下の層よりも十分に厚い場合、1層だけのときの発生条件(19)式と一致する。

(46)式の条件がみたされるとき発生しうるパターンの波数の上限は、

$$\frac{E_1}{\alpha g L_1} = \frac{\xi \cosh \zeta k^* \sinh k^* + \sinh \zeta k^* \cosh k^*}{\xi \cosh \zeta k^* \cosh k^* + \sinh \zeta k^* \sinh k^*} \quad (47)$$

から求められる。とくに、 $E_1/\alpha g L_1 \ll 1$  の場合、波長の下限は

$$\frac{2\pi \sqrt{E_1 E_{S1}}}{\alpha g} = \lambda_c \quad (48)$$

となり、上の層だけの場合の波長と一致する。すなわち、上の層だけで十分にパターンの発生条件が満たされる場合 ( $E_1/\alpha g L_1 \ll 1$ ) は、発生するパターンの波長は下層の影響を受けないことになる。

### 3. 弾性的不安定によるパターンの発生と雪えくぼの比較

これまでの結果から、帯水層をとまなう積雪が弾性的不安定にもとづいてパターンを発生することが理論的に明らかとなった。そこで、この機構が実際の雪えくぼのパターン形成を説明するものであるかどうかを、雪えくぼの観察結果と理論的帰結との比較により検討する。

#### 3.1 雪えくぼの発生条件

理論的に与えられるパターンの発生条件は、帯水層が形成された時点で積雪層の厚さ  $L$  ・



弾性定数  $E$  等が

$$\frac{E}{\alpha g L} < 1$$

という条件を満たすことである。定性的にいえば、弾性定数に関しては小さいこと、厚さに関しては大きいことがパターン発生の条件である。一般に積雪は時間の経過につれて自重のために沈降していく。この結果、積雪層は薄くなるとともに、弾性定数は大きくなる。したがって時間がたつにつれて無次元パラメータ  $E/\alpha g L$  は大きくなり、やがて1を越えるであろう。このことは、降雪のあと帯水層が形成されるまでの時間、すなわち雨が降ったり、表面融雪がさかんになるまでの時間が長過ぎればパターンは発生しないことになる。実際、このことは、経験的事実と一致している。

しかし、時には非常に固くしまった積雪に雪えくぼが形成されることもある。これは、それよりも以前に、積雪層がまだ柔らかい状態のときにすでに発生していたと考えるべきである。一般に、水の供給がわずかのときは、パターンが発生しても十分に成長せず、まだ雪えくぼが発生していないものとして見過ごされることがあるからである。しかも雪えくぼはいったん形成されると、その積雪層がすべてざらめ雪に変わるまでパターンはあまり変化せず保存されるからである。また時にはすべてがざらめ雪に変わったのちも、なんらかの形でパターンが残っている場合さえある。

### 3.2 雪えくぼの波長

雪の弾性定数は一般に、雪温  $T$  と雪の密度  $\rho$  の関数である。とくに、雪えくぼ発生時には雪温は  $0^\circ\text{C}$  近傍であるから、弾性定数に影響を与えるのは密度だけと考えればよい。

Shinojima (1966) は弾性定数の密度依存性をつぎのような形

$$\left. \begin{aligned} E &= c\rho^\nu \\ \nu &= 5 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

で実験式として与えている。積雪の密度は、降雪のすぐあとでは  $0.1\text{ g/cm}^3$  以下であるが、2・3日すると沈降によって  $0.2\text{ g/cm}^3$  以上の値となる。いま仮に密度が  $0.1\text{ g/cm}^3$  から  $0.2\text{ g/cm}^3$  に増加したとすると、(49)式から弾性変数は32倍にも増加することになる。したがってパラメータ  $E/\alpha g L$  も密度の変化に対して敏感に変化するから、パターンの発生時には  $E/\alpha g L \ll 1$  であることの方が一般的であると考えてよいであろう。

$E/\alpha g L \ll 1$  の場合に発生するパターンの波長  $\lambda_0$  を(49)式をつかって密度との関係で表わすとつぎのようになる。

$$\lambda_c = \frac{2\pi \sqrt{E E_s}}{\alpha g} \sim E \sim \rho^\nu \quad (50)$$

ただしこの場合、弾性定数  $E$  と  $E_s$  は積雪の場合、密度  $\rho$  に対して同じ依存性をもつとしてある。

また、くぼみの空間密度  $f_c$  に関しては

$$f_c = \lambda_c^{-2} \sim \rho^{-2\nu} \quad (51)$$

である。

実際の雪えくぼで測定される単位面積当りのくぼみの数  $f$  は、理論にしたがえばその上限  $f_c$  よりも少なくなるであろうが、その定性に関しては  $f_c$  と同じと考えてよい。

図11は、実測の結果を示している。測定は地形等の影響を受けない平地の積雪についてお

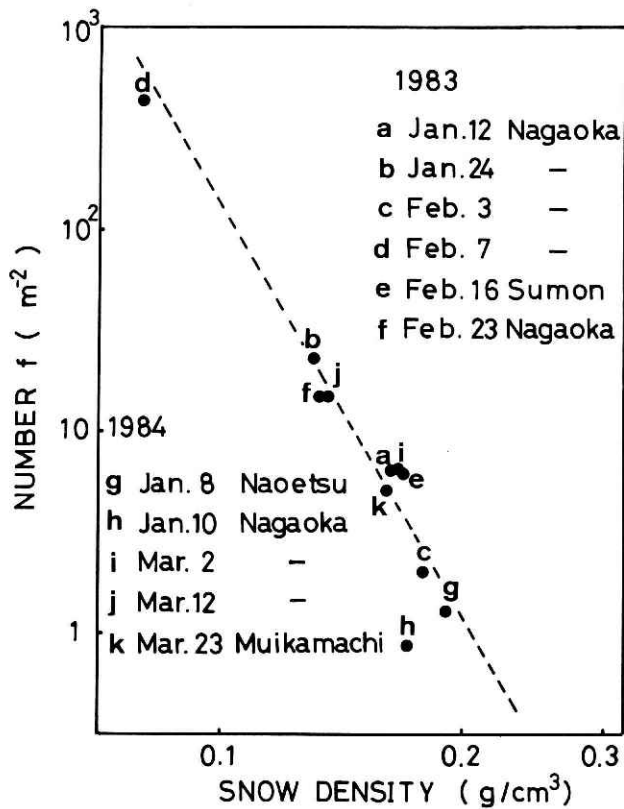


図11 積雪層の密度とくぼみの空間密度の関係。

Fig. 11 The number of dimples per unit area vs. snow density.

こなつた。また雪の密度は、雪えくぼ発生直後の、しかも帯水層のすぐ下の積雪の値である。

この結果は理論的予測どおり、密度の増加すなわち弾性定数の増加につれて単位面積当りのくぼみの数が減少することを示している。

図中の破線は(51)式をあてはめたものである。この場合 $\nu$ は3.4であり、Shinonumaの値 $\nu = 5$ よりもやや小さい。

### 3.3 地形の効果

自然に与えられる無秩序なゆらぎのほかに、地形のようなある秩序をもつたゆらぎが強制的に与えられる場合、そのパターンが表面上に発生するパターンであるかどうかは、理論的にはその波数が、

$$\frac{E}{\alpha g L} k^* < \tanh k^*$$

$$k^* = \sqrt{E_s / E} L k$$

という条件を満しているかどうかで決まる。このことは、実測における雪えくぼのパターンが地形のパターンを生み出すことがある一方で、ときにはそれがまったく現われてこない場合もあるという事実を説明する。

また、地形のパターンが現われてくる場合でも、その他の無秩序な微視的ゆらぎの結果としてのパターンも同時に重ね合わされたものとして生じるのはいうまでもない。たとえば畝立てされた畑にできる雪えくぼのように、畝のパターンが現われてくると同時に、畝の間の溝に沿って点状に分布したくぼみのパターン(納口, 1984)も発生するという観測事実は、このことから説明される。

### 3.4 雪えくぼの凹凸

帯水層をともなう積雪の弾性的不安定という考えで雪えくぼのパターン形成についてのいくつかの特徴の説明が可能となった。しかし、弾性論で議論できるのはパターンが発生するまでの段階である。実際、帯水層内の水の集中にともない積雪層は塑性変形をおこしたり、あるいは破壊現象を招くこともあるであろう。さらに、凹部に集中した水は、水みちを形成して下方へと浸透してゆくと同時に、まわりの雪を融解したりざらめ雪に変えたりするであろう。実際の雪えくぼの凹凸は、これらの成長過程をとおして形成される。

したがって、この理論からは雪えくぼの凹凸の大きさを議論することはできない。一般に、これは供給される水の絶対量に関係するものである。帯水層内の水の絶対量に関しては、パターンの発生条件、波長の条件のいずれにも陽の形では関係していないことは注目すべきで

ある。

#### 4. 結 論

雪えくぼのパターン形成の機構を説明するために、帯水層をともなう積雪の弾性的な安定・不安定を検討した。

この結果、帯水層が形成された時の積雪の状態を表わすパラメータ  $E/\alpha g L$  が1よりも小さいとき、その様状態は不安定化し、積雪の状態によって決まる  $\lambda_c$  以上の波長をもつパターンが発生することがわかった。

雪えくぼの実測とこの理論との比較により、雪えくぼのパターン形成は、帯水層をともなう積雪の弾性的不安定によって十分に説明されることがわかった。

#### 参 考 文 献

- 1) 納口恭明 (1984) : 雪えくぼのパターン形成 I. 国立防災科学技術センター研究報告, 第33号, 237-254.
- 2) Shinojima, K. (1966) : Visco-elastic deformation of snow. Physics of Snow and Ice, The Institute of Low Temperature Science, 875-907.

(1984年6月5日 原稿受理)

付 録

この場合、方程式は

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + E_s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \rho g \\ u &= 0 & (z=0) \\ \sigma_z &= E \frac{\partial u}{\partial z} = \sigma_{zL} & (z=L) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

であり、非一様成分の方程式は

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + E_s \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} &= 0 \\ u &= 0 & (z=0) \\ \sigma'_z &= \sigma'_{zL} & (z=L) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。

第1のステップとして大きさ  $\delta$ 、波数  $k$  の仮想的な荷重分布

$$\sigma'_{zL} = \delta \sin ky \quad (3)$$

を与える。

このとき止水面 ( $z=L$ ) での変位は

$$u' = \frac{\delta}{k \sqrt{E E_s}} \tanh \sqrt{\frac{E_s}{E}} kL \sin ky \quad (4)$$

となる。

この変位のために水が集中して、新たな荷重分布

$$\sigma'_{zL} = \delta (1+r) \sin ky \quad (5)$$

が形成される。ただし

$$r = \frac{\alpha g}{k \sqrt{E E_s}} \tanh \sqrt{\frac{E_s}{E}} kL \quad (6)$$

である。

第2のステップとして(5)式のもとで  $u'$  を計算する。これを繰り返していくと、第  $n$  番目のステップにおける  $\sigma'_{zL}$  は

$$\sigma'_{zL} = \delta \sin ky \sum_{i=0}^n r^i \quad (7)$$

となる。 $r$  が1よりも大きい場合、ステップの増加につれて  $\sigma'_{zL}$  は発散する。したがって、この場合、不安定になる。

$$r = \frac{\alpha g}{k \sqrt{E E_s}} \tanh \sqrt{\frac{E_s}{E}} kL > 1 \quad (8)$$

この条件は、当然ながら仮想変形による場合の(16)式(本文中)と一致する。