防災科学技術研究所研究報告　第 65 号　2004 年 3 月

降水形成過程の数値モデリング

三隅良平*・圓山憲一*

Numerical Modeling of Precipitation Process

Ryohei MISUMI and Ken-ichi MARUYAMA

Advanced Technology Research Group,
National Research Institute for Earth Science and Disaster Prevention, Japan
misumi@bosai.go.jp, maruyama@bosai.go.jp

Abstract

Numerical modeling of precipitation processes, including nucleation of cloud drops and ice crystals, diffusion growth and evaporation/sublimation of drops and ice particles, freezing of drops, melting of ice particles, collision and coalescence among drops and ice particles, ice splinter production in riming, breakup of raindrops, and sedimentation of precipitating particles are described. In this model cloud particles are classified into four categories; drops, ice crystals, snowflakes and graupels. Each category is divided into 34 size classes. Results of the numerical simulation of a convective cloud using this model are also shown.

Key words : Precipitation, Cloud physics, Numerical simulation, Spectral microphysics, Rainfall

1.　はじめに

雲は通常，直径数 μm 程度の雲粒として生成する．雲粒は過飽和の大気中において凝結成長するとともに，粒径分布に充分な幅があるとき，相互の落下速度に差ができて衝突併合し，雨滴を生成する．また 0℃以下の空気中で雲粒と氷粒子が共存すると，氷の飽和水蒸気圧が水のそれよりも低いため，氷粒子が選択的に成長し，降水粒子がより形成されやすくなる．降水粒子は，単に雨や雪として地上に落下するのみならず，落下中の融解，蒸発により空気を冷やすとともに，空気を引きずる力により下降流を発生させ，雲自身の力学的・熱力学的構造にフィードバックする．したがって，降水機構の研究は，集中豪雨・豪雪のメカニズムを解明し，さらには地球全体の水・熱循環を明らかにする上で，非常に重要な取り組みである．

降水形成過程はその実態を直接観測するのが非常に困難であり，レーダーを用いたリモートセンシングや室内実験とともに，数値モデリングが有効な研究手法になっている．ただし雲を構成する粒子は，直径が数 μm～数 ㎜ まで 3 オーダーにおよび，また氷粒子の形状は様々で，個々に結晶の性質が異なるため，その数値モデリングは容易ではない．Kessler（1969）はこの困難を避けるため，雲の力学を研究する立場から，非常に単純化された降水形成過程のモデル化を提案した．Kessler の方法は，雲粒子を雲粒と雨滴の 2 種類に分け，雲粒の混合比が一定値を超えると降水が形成されると仮定する．この方法は雲粒や雨滴の粒径分布関数の変動を考慮せず，それぞれの量のみを計算するもので，バルクモデルと呼ばれている．Lin *et al*.（1983）は Kessler のモデルを氷相過程に拡張し，雪や雹の形成過程を簡便な方法でモデル化した．さらに Murakai（1990）や Ferrier（1994）は雲粒子の量のみならず，数をも同時に計算する 2 モーメントのバルクモデルを開発した．バルクモデルは，降水形成過程を比較的容易に計算でき，また降水形成の雲物理過程をある程度考慮できるため，大きな計算容量が必要とされるストームの 3 次元数値シミュレーションや，数値予報，全球の気候予測モデルへの導入が図られている．ただしバルクモデルは降水形成過程を必ずしも物理的に表現していないため，計算結果の妥当性について，より詳細なモデルを用いた検証が必要となる．

*独立行政法人　防災科学技術研究所　防災基盤科学技術研究部門

一方で降水形成過程を数値的にできるだけ詳細に表現する取り組みもなされている．Takeda（1971），Ogura and Takahashi（1973），Soong（1974），Shiino（1983）らは，水滴の大きさを複数のビンクラスで表現することにより，様々なサイズの雲粒子の相互作用を表現した．この方法はスペクトル法あるいはビン法などと呼ばれている．ビン法は小さい雲粒から大きな雨滴の成長過程を連続的に取り扱えるため，降水形成の物理過程を現実的に表現することができる反面，粒子のサイズを分けるビンの数だけ計算機のメモリが必要となるため，大型計算機による長時間の計算を要する．上記の研究はすべて氷を含まない暖かい雲を対象としているが，氷相過程を含んだビン法モデルが Takahashi（1976），Hall（1980），Reisin *et al*.（1996），Chen and Lamb（1994）などにより開発されている．ただし氷相過程は非常に複雑であるとともに，未解明のプロセスが多く，これらのモデルも降水形成の物理過程がすべてを表現されているわけではない．

この報告では，防災科学技術研究所が作成した，氷相過程を含むビン法による雲モデルについて説明する．用いている手法は基本的に Reisin *et al*.（1996）に従うが，彼らの論文には書かれていない計算上の細かい取り扱いにまで言及する．

2．粒子のカテゴリー分けと粒径の区分

2.1　降水形成過程の概要

初めにここで取り扱う降水形成過程の概要を述べる．**図1** は水蒸気から降水粒子が形成されるまでの過程を示したダイヤグラムである．このモデルでは，雲を構成する粒子を水滴，氷晶，雪片，あられの4つのカテゴリーに分けて取り扱う．現実には，水滴・氷晶・雪片・あられのように粒子を常に明確に区別できるわけではなく，それぞれの中間的な性質をもつ粒子も存在するが，様々な粒子の性質を連続的に扱えるような定式化はまだできておらず，このようなカテゴリー分けを行う．また発達した積乱雲ではしばしば雹が形成されるが，日本では比較的希な現象なので，ここでは扱わないこととする．

大気が水に対して過飽和のとき，核となる物質に水蒸気が凝結して雲粒を形成する．このプロセスを核形成と呼ぶ．雲粒の形成は，核となる物質の化学組成や粒径分布，大気の過飽和度に依存し，非常に複雑であるため，このモデルでは後述するように核形成をごく簡単に表現する．形成された雲粒は，拡散成長によって粒径分布の幅を広げ，さらに衝突併合してドリズルや雨滴を形成する．雨滴は相互の衝突によって分裂し，その径が減少する．これらのプロセスを水滴のカテゴリーで取り扱う．

気温が充分に低く，また大気が氷に対して過飽和のとき，氷晶の核形成が起こる．氷晶が発生するメカニズムは必ずしも充分に解明されていないため，このモデルでは経験式を用いて氷晶の発生数を診断する．また雲粒が上空に運ばれて凍結したり，あられの表面が剥がれることによっても氷晶が形成される．形成された氷晶は拡散成長によって粒径を増し，雪結晶となる．雪結晶は落下

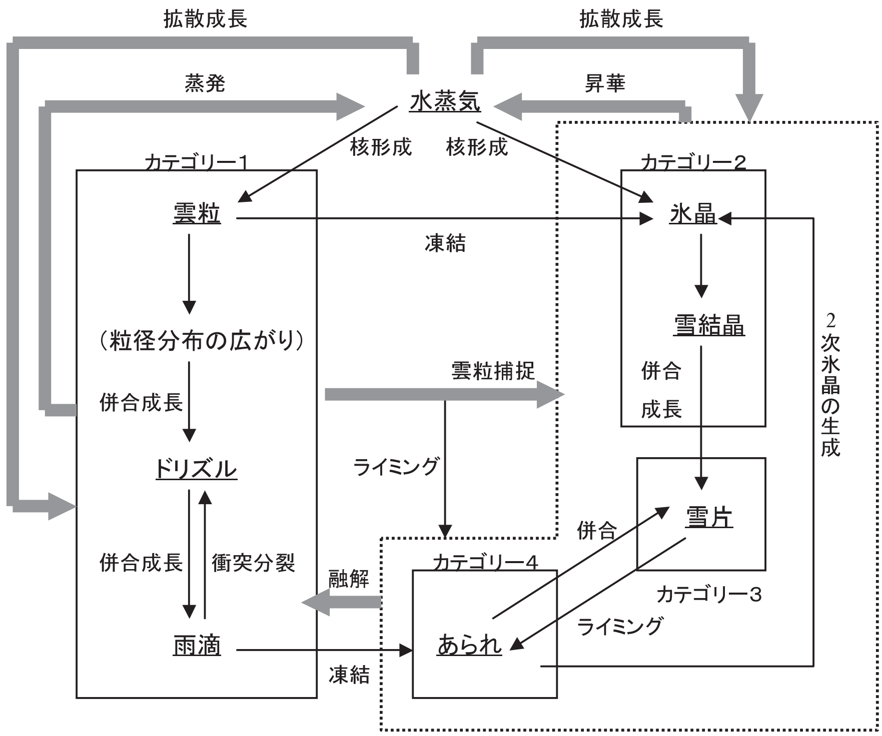

図1　降水形成過程のダイヤグラム
Fig. 1　A diagram of the formation of precipitating particles.

の過程で雲粒を捕捉し，融解して雨滴を形成する．これらの過程を氷晶カテゴリーで取り扱う．

雪片は氷晶同士，あるいは氷晶と小さいあられの併合によって形成される．氷晶と同様に，落下の過程で雲粒や氷粒子を捕捉し，0℃ より温度が高い時には融解して雨滴を形成する．一方，過冷却水滴が氷晶または雪片と衝突すると，ライミング（着氷）により，あられが形成される．またドリズルや雨滴の凍結によってもあられが形成されると仮定している．

2.2　粒子のサイズの区分

今，それぞれの粒子のカテゴリー（水滴，氷晶，雪片，あられ）を，その質量によって 34 個のサイズビンに分ける．各ビンの境界の質量を x_k（k=1,2, ... ,35）とし，k が 1 増えるごとに質量が 2 倍ずつ増えていくものとして

$$x_{k+1} = 2x_k \tag{1}$$

とする．最も小さい粒子の質量を x_1=1.598×10^{-11}g（直径 3.125 μm の球形の水滴に相当）とし，最大の粒子の質量は x_{35}=2.7468×10^{-1}g（直径 8.063㎜ の水滴に相当）とする．このようにおくと，$k=16$ のとき球形を仮定した水滴の直径がちょうど 100 μm, k=26 のときちょうど 1㎜となり，取り扱いが便利である．また雨滴の場合，衝突分裂により直径が 5 ㎜を超えることはほとんどないため，質量が x_{35} を超えることはない．ただし，氷粒子の場合は直径が大きくなり得るので，モデルの適用限界には注意を要する．

質量 x に対する数密度関数を $n(x)$ で定義する．ここで $n(x)dx$ は質量が x～$x+dx$ の範囲にある粒子の個数を表す．このとき，粒子の総数 N，総質量 M は $n(x)$ を用いてそれぞれ以下のように表現できる．

$$N = \int_0^{\infty} n(x)\,dx \tag{2}$$

$$M = \int_0^{\infty} xn(x)\,dx \tag{3}$$

一般に密度関数を $n(x)$ とするとき，

$$\int x^p n(x)\,dx$$

を p 次のモーメントという．したがって粒子の総数は $n(x)$ に関する 0 次のモーメント，粒子の総質量は 1 次のモーメントである．今，k 番目のビンに含まれる粒子の数を N_k，総質量を M_k とすると，

$$N_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} n(x)\,dx \tag{4}$$

$$M_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} xn(x)\,dx \tag{5}$$

となる．このように 2 つのモーメント（数と質量）を独立に取り扱う手法を 2 モーメント法という．2 モーメント法のメリットは，変数が 2 つあるため，数密度関数 $n(x)$ をより精緻に表現できることである．例えば，仮に 1 つのモーメント N_k のみが既知であるとき，**図 2（a）** のように関数 $n(x)$ は，ビンごとにとびとびの値

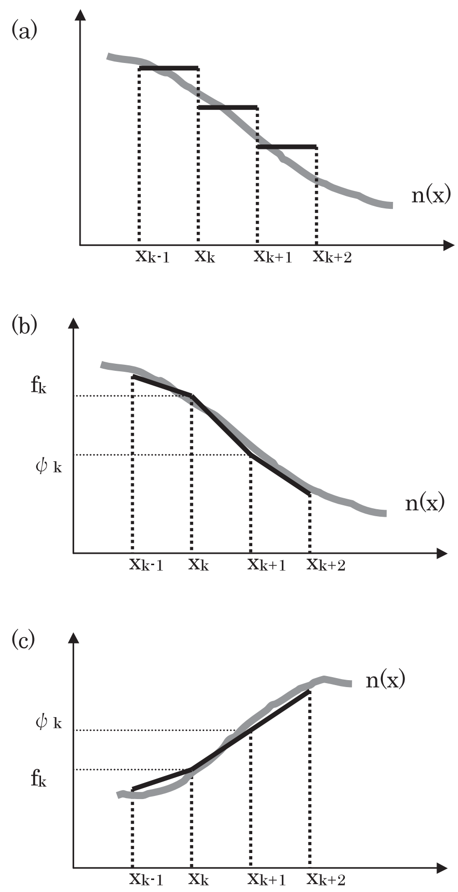

図 2　ビンを用いた数密度関数 $n(x)$ の表現方法

Fig. 2　Representation of the number density function, $n(x)$, using discrete bins.

を持つ不連続な関数として表現される．一方，2 つのモーメント N_k と M_k が独立に得られているときは，**図 2（b）（c）** のように，ビン内部における $n(x)$ 傾きを線形関数で表現することができる．具体的には，**図 2（b）（c）** のように，$x_k^j n(x_k) = x_k^j f_k$ および $x_{k+1}^j n(x_{k+1}) = x_{k+1}^j \psi_k$ が満たされるように $x^j n(x)$ を 1 次関数

$$x^j n(x) = x_k^j f_k \frac{x_{k+1} - x}{x_k} + x_{k+1}^j \psi_k \frac{x - x_k}{x_k} \tag{6}$$

で表現すると，N_k，M_k は

$$N_k = \frac{1}{2}(f_k + \psi_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{7}$$

$$M_k = \frac{1}{2}(x_k f_k + x_{k+1}\psi_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{8}$$

で表される．なお，ψ_k，f_k は

$$\psi_k = \frac{2N_k}{x_k}\left(\frac{\overline{x}_k - x_k}{x_k}\right) \tag{9}$$

$$f_k = \frac{2N_k}{x_k}\left(\frac{x_{k+1} - \overline{x}_k}{x_k}\right) \tag{10}$$

であり，$\bar{x}$ はビン内の粒子の平均質量で

$$\bar{x}_k = \frac{M_k}{N_k} \tag{11}$$

である．数密度 N_k が同じであっても，比較的小さい質量の粒子がビンに含まれているとき，$n(x)$ は **図2（b）** のように表現される．逆に，同じ N_k に対して比較的質量の大きい粒子が多くあるとき，$n(x)$ の形は **図2（c）** のようになる．このような2つのモーメントを用いた $n(x)$ の表現により，数密度関数 $n(x)$ がより現実的に表現され，粒子の併合成長計算の精度が著しく向上する（Tzivion *et al*., 1987）．

2.3　粒子の形状と密度

4つのカテゴリー（水滴，氷晶，雪片，あられ）に含まれる粒子の形状や密度を次のように仮定する．水滴はその大きさにかかわらず球形とし，密度が $\rho_w = 1$ g/cm^3 であるとする．氷晶は，現実には生成する温度や湿度によって様々な形態をもつが，数値的な取り扱いを容易にするため平板状の結晶を仮定し，軸比が 0.05 の回転楕円体とする．氷晶の密度は，サイズが大きくなるとともに減少し，質量 x_k の氷晶の密度を

$$\rho_{ik} = 0.9 - 0.45\,(k-1)/34$$

とする．ρ_i の単位は g/cm^3 である．このとき回転楕円体の体積の公式から，氷晶の長軸の長さを

$$d_i = \left(\frac{6x}{0.05\pi\rho_i}\right)^{1/3} \tag{12}$$

で表すことができる．

雪片は氷粒子の併合体である．実際の雪片の形態は複雑で2つとして同じものはないが，ここでは数値的に扱いやすくするため球形とし，密度を $\rho_s = 0.1$ g/cm^3 とする．あられもまた球形を仮定し，その密度を $\rho_g = 0.4$ g/cm^3 とする．

3．雲粒の生成

大気が水に対して過飽和のとき，大気中に含まれる凝結核の一部が活性化して雲核として働き，雲粒が形成される．初めに形成される雲粒の粒径分布は，雲核自身の数や粒径分布，化学組成などに影響されるため，その数値的な取り扱いは非常に困難である．ここでは，雲核が活性化される物理過程は表現せず，初めに形成される雲粒の粒径分布を，以下のような数密度関数で与える．

$$n(x) = N_c \frac{1}{\bar{x}} \exp\left(-\frac{x}{\bar{x}}\right) \tag{13}$$

ここで N_c は

$$\int_0^\infty N_c \frac{1}{\bar{x}} \exp\left(-\frac{x}{\bar{x}}\right) dx = N_c \tag{14}$$

であり，生成される雲粒の総数を表す．生成される雲粒の総質量は

$$\int_0^\infty N_c \frac{x}{\bar{x}} \exp\left(-\frac{x}{\bar{x}}\right) dx = N_c \bar{x} \tag{15}$$

となり，$\bar{x}$ が初期雲粒の平均質量に対応している．パラメーター N_c，$\bar{x}$ を変えることにより，大気中に含まれる雲核の数や性質の違いを表現することが可能である．一般に大気中の雲核の数は，海洋上で 1cm^3 当たり数十個，陸上では，多いところで 1cm^3 当たり数千個に達すると言われている．日本付近では，Ichimura *et al*.（1980）が冬期に南西諸島の航空機観測を行い，積雲を構成する雲粒の数が 1cm^3 当たり 200個程度であったことを示している．一方，Okada *et al*.（1986）は名古屋市でエアロゾルのサンプリングを行い，1％の過飽和度で活性化する凝結核の個数が 1cm^3 当たり 10^3 のオーダーに達することを示した．ここでは海洋性の雲を想定し，N_c の初期値を 250cm^{-3} とおく．また $\bar{x} = 6.54 \times 10^{-11}$g（直径 5μm）とする．このとき k 番目のビンに生じる雲粒の数濃度 N_k および質量 M_k は以下のように表せる．

$$\begin{aligned} N_k &= \int_k^{k+1} N_c \frac{1}{\bar{x}} \exp\left(-\frac{1}{\bar{x}}\right) dx \\ &= N_c\left[\exp\left(-\frac{x_k}{\bar{x}}\right) - \exp\left(-\frac{x_{k+1}}{\bar{x}}\right)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} M_k &= \int_k^{k+1} N_c \frac{x}{\bar{x}} \exp\left(-\frac{x}{\bar{x}}\right) dx \\ &= N_c\left[(x_k + \bar{x}) \exp\left(-\frac{x_k}{\bar{x}}\right) - (x_{k+1} + \bar{x}) \exp\left(-\frac{x_{k+1}}{\bar{x}}\right)\right] \end{aligned} \tag{17}$$

数値計算を行う際には，個々の空気塊において生成した雲粒の個数を記憶しておき，雲核の数 N_c の初期値からこれまでに生成された雲粒の個数を差し引いて，残った雲核のみが活性化されるようにする．また凝結し得る水蒸気量が（15）式に満たない場合は，N_c の値を調節して水蒸気が過剰に凝結しないようにする．例えば，大気中の水蒸気量を q_v，飽和水蒸気量を q_s とすれば，凝結可能な水蒸気量 q_x は，潜熱放出を考慮すると

$$q_x = \frac{q_v - q_s}{1 + \dfrac{L_v^2 q_s}{C_p R_v T^2}} \tag{18}$$

で表せる．ただし L_v は水蒸気の潜熱，C_p は空気の定圧比熱，R_v は水蒸気の気体定数，T は気温である．$N_c \bar{x} > q_x$ のとき，そのままの N_c 値を用いると水蒸気の凝結量が過剰となるので，N_c 値を

$$N_c = \frac{q_x}{\bar{x}} \tag{19}$$

と調整する．なお，雲粒の蒸発による雲核のリサイクルは考えない．

4．氷晶の生成

気温が充分に低く，空気が氷に対して過飽和であるとき，氷晶核の一部が活性化されて氷晶が形成される．形成される氷晶の数は，気温や氷に対する過飽和度に依存

することが知られている．Myers *et al*.（1992）は様々な観測データや実験データを総合して，活性化される氷晶核の数 N_i（単位は l^{-3}）を診断する式を次のように導いている．

$$N_i = \exp[-2.8 + 0.262\,(T_0 - T)] + \exp(-0.639 + 0.126 S_i) \tag{20}$$

T_0 は 0℃，S_i は氷に対する過飽和度（%）を表している．（20）式の右辺第 1 項は接触核形成を表現し，第 2 項は昇華核形成および凝結・凍結核形成を表現している．第 1 項は -2℃以下で，第 2 項は -5℃以下で働くと仮定されている．

数値計算における取り扱いは雲粒と同様，空気塊について過去に生成された氷晶核の数をカウントしておき，N_i から過去に生成された氷晶の数を差し引いた数の氷晶核が活性化するものとする．形成される初期氷晶の粒径は一様であるとし，すべてここで取り扱う最小の質量（1.598×10^{-11}g）をもつと仮定する．このとき氷晶核の活性化による，氷晶カテゴリーでの数濃度および質量の増分は

$$\Delta N_k = \begin{cases} 10^{-3}(N_i - N_{pre}), & if\ \ k=1\ \ and\ \ N_i > N_{pre} \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{21}$$

$$\Delta M_k = \begin{cases} 10^{-3}(N_i - N_{pre})x_1, & if\ \ k=1\ \ and\ \ N_i > N_{pre} \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{22}$$

となる．ただし（22）の ΔN_k，ΔM_k の単位は cm^{-3} および gcm^{-3}，また N_{pre} は個々の空気塊において消費された氷晶核の数である．なお生成される氷晶の質量が，氷に対する過飽和水蒸気量を超える場合の扱いは，雲粒の場合と同様である．

5．水と氷の拡散成長・昇華・蒸発

5.1　1 個の粒子の拡散成長と蒸発

生成された雲粒や氷粒子は，過飽和大気において分子拡散により凝結・昇華成長し，未飽和大気において蒸発・昇華する．まず始めに，質量 x_w，半径が r_d の 1 個の球形水滴について，分子拡散による質量の変化率を考える．水滴の表面における水蒸気拡散を考慮すると，水滴の質量の変化率は，

$$\frac{dx_w}{dt} = 4\pi r_d^{\,2} D_v \left(\frac{d\rho_v}{dr}\right)_{rd} \tag{23}$$

と書ける．ここで D_v は水蒸気の分子拡散係数，$4\pi r_d^2$ が水滴の表面積，r は水滴の中心からの距離，$(d\rho_v/dr)_r$ が水滴表面での水蒸気密度の勾配を示している．空気中の水蒸気の分布について，定常状態が成り立っていると仮定したとき，球座標における水蒸気の拡散方程式は

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = D_v \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \rho_v}{\partial r}\right) = 0 \tag{24}$$

で表すことができる．境界条件として，無限の遠方における水蒸気の密度 $\rho_v(\infty)$，および水滴の表面（$r = r_d$）における水蒸気密度 $\rho_v(r_d)$ を用いると，（24）は以下のように解ける．

$$\rho_v(r) = \rho_v(\infty) - \frac{r_d}{r}[\rho_v(\infty) - \rho_v(r_d)] \tag{25}$$

（25）より（$d\rho_v/dr$）r を求め，（23）に代入すると，

$$\frac{\partial x_w}{\partial t} = 4\pi r_d D_v [\rho_v(\infty) - \rho_v(r_d)] \tag{26}$$

となる．さて，式（26）における未知数は（$\partial x_w/\partial t$）および $\rho_v(r_d)$ の 2 つであり，（26）を解くためにはもう 1 つの方程式が必要となる．水滴の表面に発生する潜熱が熱拡散により速やかに運ばれ，熱的にも定常状態に達すると仮定すると，水滴表面における温度の変化は（26）と同様に，

$$L_v \frac{\partial x_w}{\partial t} = 4\pi r_d \kappa [T(r_d) - T(\infty)] \tag{27}$$

と表せる．なお κ は熱拡散係数である．飽和水蒸気圧を e_s としたときのクラウジウス・クラペイロンの式

$$\frac{1}{e_s}\frac{de_s}{dT} = \frac{L}{R_v T^2} \tag{28}$$

に気体の状態方程式 $e_s = \rho_v r_v T$ を代入することにより，飽和水蒸気密度 ρ_{vs} の変化率と気温変化率の関係式

$$\frac{d\rho_{vs}}{\rho_{vs}} = \frac{L_v}{R_v}\frac{dT}{T^2} - \frac{dT}{T} \approx \frac{L_v}{R_v}\frac{dT}{T^2} \tag{29}$$

が導かれる．（29）を無限の遠方から $r = r_d$ まで積分すると，

$$\ln\left[\frac{\rho_v(r_d)}{\rho_{vs}(\infty)}\right] = -\frac{L_v}{R_v}\left[\frac{1}{T(r_d)} - \frac{1}{T(\infty)}\right]$$
$$\approx \frac{L_v}{R_v T(\infty)^2}[T(r_d) - T(\infty)] \tag{30}$$

となり，これを変形すると

$$\frac{\rho_v(r_d)}{\rho_{vs}(\infty)} = \exp\left(\frac{L_v}{R_v T(\infty)^2}[T(r_d) - T(\infty)]\right)$$
$$\approx 1 + \frac{L_v}{R_v T(\infty)^2}[T(r_d) - T(\infty)] \tag{31}$$

となる．なお水滴表面付近の空気は飽和しているとして $\rho_v(r_d) = \rho_{vs}(r_d)$ を仮定した．（31）に（27）を代入して整理すると，

$$\frac{\rho_v(r_d) - \rho_{vs}(\infty)}{\rho_{vs}(\infty)} = \frac{1}{4\pi\kappa}\frac{L_v^{\,2}}{R_v T(\infty)^2}\left(\frac{\partial x_w}{\partial t}\right) \tag{32}$$

ここへ（26）を代入して $\rho_v(r_d)$ を消去すると

$$\frac{\partial x_w}{\partial t} = \frac{4\pi r_d(\rho_v(\infty)/\rho_{vs}(\infty) - 1)}{\left(\dfrac{L_v^{\,2}}{\kappa R_v T^2} + \dfrac{1}{D_v \rho_v(\infty)}\right)} \tag{33}$$

が導かれ，周囲の空気の水蒸気密度 ρ_v（∞）と飽和水蒸気密度 ρ_{vs}（∞）から水滴の成長率を決めることができる．今，過飽和度を ΔS_w，通風係数を f_w とおけば，（33）は

$$\frac{\partial x_w}{\partial t}=C_w(p,T)\Delta S_w x_w^{1/3} \tag{34}$$

と書き直すことができる．ただし C_w（p,T）は

$$C_w(p,T)=(\frac{3}{4\pi\rho_w})^{1/3}\frac{4\pi r_d f_w}{q_s(\frac{L_v^2}{\kappa R_v T^2}+\frac{R_v T}{D_v e_s})} \tag{35}$$

であり，q_s は飽和水蒸気量である．（34）は $\Delta S_w>0$ のときは拡散成長を，$\Delta S_w<0$ のときは蒸発を表す．

氷粒子（氷晶，雪片，あられ）の拡散成長率も同様にして

$$\frac{\partial x_i}{\partial t}=C_i(p,T)\Delta S_i x_i^{1/3} \tag{36}$$

で表すことができ，

$$C_i(p,T)=(\frac{3}{4\pi\rho_i})^{1/3}\frac{4\pi r f_i C}{q_{si}(\frac{L_i^2}{\kappa R_v T^2}+\frac{R_v T}{D_v e_{si}})} \tag{37}$$

となる．なお ΔS_i は氷に対する過飽和度，q_{si}，e_{si} は氷に対する飽和水蒸気量と水蒸気圧，f_i は通風係数である．Cは氷粒子の形の効果を表す係数で，球形の粒子については1，軸比がb/aである回転楕円体に対しては，

$$C=\frac{ae}{\sin^{-1}e},\ e=(1-\frac{b^2}{a^2})^{1/2} \tag{38}$$

で与えられる．また水および氷に対する通風係数はそれぞれ

$$\begin{cases} f_w=1.00+0.108\,(N_{sc}^{1/3}N_{\mathrm{Re}}^{1/2})^2 & for\ \ N_{sc}^{1/3}N_{\mathrm{Re}}^{1/2}<1.4 \\ f_w=0.78+0.308N_{sc}^{1/3}N_{\mathrm{Re}}^{1/2} & for\ \ N_{sc}^{1/3}N_{\mathrm{Re}}^{1/2}\geq 1.4 \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} f_i=1.00+0.14\,(N_{sc}^{1/3}N_{\mathrm{Re}}^{1/2})^2 & for\ \ N_{sc}^{1/3}N_{\mathrm{Re}}^{1/2}<1.0 \\ f_i=0.86+0.28\,(N_{sc}^{1/3}N_{\mathrm{Re}}^{1/2})^2 & for\ \ N_{sc}^{1/3}N_{\mathrm{Re}}^{1/2}\geq 1.0 \end{cases} \tag{40}$$

で与えられる．ここで N_{sc}，N_{re} はそれぞれSchmidt数およびReynolds数である（Pruppacher and Klett, 1978）．

5.2　数密度の変化率

前節では1個の水滴や氷粒子の拡散成長率・蒸発率を表す方程式を導いた．本節では数密度関数が n（x）で表される水滴や氷粒子の集団の，拡散成長方程式を導く．粒子の質量を x，粒子の拡散成長率を（dx/dt）とするとき，数密度関数 n（x）の変化率は，

$$\frac{\partial n(x)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[n(x)(\frac{dx}{dt})] \tag{41}$$

と表せる．（41）を解析的に解くために，$dx/dt=k(t)\,\phi(x)$ と変数分離する．このとき，2つのパラメーター $dx/dv=\phi(x)$ および $d\tau/dt=k(t)$ を導入し，

$$n(x,t)=n(\nu,t)\frac{d\nu}{dx} \tag{42}$$

と定義すると，（41）の左辺は

$$\frac{\partial n(x)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}[n(\nu,t)\frac{d\nu}{dx}]=\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}[n(\nu,t)\frac{1}{\phi(x)}]$$
$$=\frac{k(t)}{\phi(x)}\frac{\partial n(\nu,t)}{\partial\tau}$$

（41）の右辺は

$$-\frac{\partial}{\partial x}[n(\nu,t)\frac{d\nu}{dx}\frac{dx}{dt}]=-\frac{\partial}{\partial x}[n(\nu,t)\frac{1}{\phi(x)}k(t)\phi(x)]$$
$$=-k(t)\frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{\partial n(\nu,t)}{\partial\nu}=-\frac{k(t)}{\phi(x)}\frac{\partial n(\nu,t)}{\partial\nu}$$

と変形できるので，

$$\frac{\partial n(\nu,t)}{\partial\tau}+\frac{\partial n(\nu,t)}{\partial\nu}=0 \tag{43}$$

の関係が導ける．（43）の解析解は，

$$n(\nu,t+\Delta t)=n(\nu-\tau,t) \tag{44}$$

である．これを（42）を用いて n（x,t）の式に戻すと

$$n(x,t+\Delta t)=\frac{\phi(x_0)}{\phi(x)}n(x_0,t) \tag{45}$$

が得られる．ここで x_0 は時刻tにおける水滴の質量であり，積分

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\phi(x)}=\int_t^{t+\Delta t}k(t)\,dt \tag{46}$$

を実行することにより求めることができる．C_w が Δt 秒間において一定であるとすると，$\phi(x)=x^{1/3}$，$k(t)=C_w\Delta S_w$ とおくことができるので，これを（46）に代入して x_0 を求めると，

$$x_0=[x^{2/3}-\frac{2}{3}C_w\int_t^{t+\Delta t}\Delta S_w(t)\,dt]^{3/2} \tag{47}$$

となる．（47）を（45）に代入すれば，凝結・蒸発による，Δt 秒後の水滴の数密度関数 n（x）を解析的に求めることができて，

$$n(x,t+\Delta t)=x^{-1/3}(x^{2/3}-\frac{2}{3}\tau_w)^{1/2}n[(x^{2/3}-\frac{2}{3}\tau_w)^{3/2},t] \tag{48}$$

ただし τ_w は

$$\tau_w=C_w(p,T)\int_t^{t+\Delta t}\Delta S_w(t)\,dt \tag{49}$$

である．（48）が水滴の拡散成長による Δt 秒間の n（x）の変動を表す式である．このとき，各ビンにおける粒子

の数N_k，質量M_kはそれぞれ

$$N_k(t+\Delta t)=\int_{x_k}^{x_{k+1}} n(x,t+\Delta t)dx$$

$$=\int_{z_k}^{z_{k+1}} (z^{2/3}+\frac{2}{3}\tau_w)^{-1/2} z^{1/3} n(z,t)dz$$

$$\approx\int_{z_k}^{z_{k+1}} n(z,t)dz \tag{50}$$

$$M_k(t+\Delta t)=\int_{x_k}^{x_{k+1}} xn(x,t+\Delta t)dx$$

$$\approx\int_{z_k}^{z_{k+1}} (z^{2/3}+\frac{2}{3}\tau_w)^{2/3} n(z,t)dz \tag{51}$$

となる．ただしzは

$$z=(x^{2/3}-\frac{2}{3}\tau_w)^{3/2} \tag{52}$$

である．氷粒子についてもC_wをC_iに，ΔS_wをΔS_iに置き換えることにより（50），（51）と同様の式が導ける．

5.3　過飽和度の変化率

（50）と（51）を計算する際，時間項を含んだ過飽和度$\Delta S(t)$の関数形が必要となる．氷と水が共存するとき，水に対する過飽和水蒸気量ΔS_w，氷に対する過飽和水蒸気量ΔS_iはそれぞれ

$$\Delta S_w=q_v-q_{sw} \tag{53}$$

$$\Delta S_i=q_v-q_{si} \tag{54}$$

で表せる．ここでq_vは空気中の水蒸気量，q_{sw}およびq_{si}は水および氷に対する飽和水蒸気量である．また水滴の総質量をM_w，氷粒子の総質量をM_iと書くと，拡散による水蒸気量の変化は

$$\frac{\partial q_v}{\partial t}=-\frac{\partial M_w}{\partial t}-\frac{\partial M_i}{\partial t} \tag{55}$$

であり，気温の変化率は

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{L_v}{C_p}(\frac{\partial M_w}{\partial t})+\frac{L_i}{C_p}(\frac{\partial M_i}{\partial t}) \tag{56}$$

で表される．L_iは昇華の潜熱である．水に対する過飽和度の時間変化は，（53），（55），（56）により

$$\frac{\partial \Delta S_w}{\partial t}=\frac{\partial q_v}{\partial t}-\frac{\partial q_{sw}}{\partial t}=(\frac{\partial q_v}{\partial t})-(\frac{\partial q_{sw}}{\partial T})(\frac{\partial T}{\partial t})$$

$$=-[1+\frac{L_v}{C_p}(\frac{\partial q_{sw}}{\partial T})](\frac{\partial M_w}{\partial t})-[1+\frac{L_i}{C_p}(\frac{\partial q_{sw}}{\partial T})](\frac{\partial M_i}{\partial t})$$

$$=-R_w\Delta S_w-P_i\Delta S_i \tag{57}$$

氷に対する過飽和の変化率も同様にして

$$\frac{\partial \Delta S_i}{\partial t}=-[1+\frac{L_v}{C_p}(\frac{\partial q_{si}}{\partial T})](\frac{\partial M_w}{\partial t})-[1+\frac{L_i}{C_p}(\frac{\partial q_{si}}{\partial T})](\frac{\partial M_i}{\partial t})$$

$$=-P_w\Delta S_w-R_i\Delta S_i \tag{58}$$

で表わせる．ただし

$$R_w=[1+\frac{L_v}{C_p}(\frac{\partial q_{sw}}{\partial T})]C_w(p,T)\int_0^\infty x^{1/3}n_w(x)dx \tag{59}$$

$$P_i=[1+\frac{L_i}{C_p}(\frac{\partial q_{sw}}{\partial T})]C_i(p,T)\int_0^\infty x^{1/3}n_i(x)dx \tag{60}$$

$$P_w=[1+\frac{L_v}{C_p}(\frac{\partial q_{si}}{\partial T})]C_w(p,T)\int_0^\infty x^{1/3}n_w(x)dx \tag{61}$$

$$R_i=[1+\frac{L_v}{C_p}(\frac{\partial q_{si}}{\partial T})]C_i(p,T)\int_0^\infty x^{1/3}n_i(x)dx \tag{62}$$

である．（57）と（58）は連立微分方程式であり，解析的に解くことができる．（57）と（58）からS_iを消去すると，

$$\frac{\partial^2\Delta S_w(t)}{\partial^2 t}+(R_w+R_i)\frac{\partial \Delta S_w(t)}{\partial t}+(R_wR_i-P_iP_w)=0 \tag{63}$$

（63）の解を

$$\Delta S_w(t)=C_1e^{-m_1t}+C_2e^{-m_2t} \tag{64}$$

とおいて代入すると，

$$m_{1,2}=\frac{(R_w+R_i)\pm\sqrt{(R_w+R_i)^2-4(R_wR_i-P_wP_i)}}{2}$$

が得られる．近似式

$$R_wR_i\approx P_wP_i \tag{65}$$

を用いれば

$$m_{1,2}\approx 0,\ R_w+R_i \tag{66}$$

となる．（66）を（57）に代入することにより

$$\Delta S_i(t)=C_1\frac{m_1-R_w}{P_i}e^{-m_1t}+C_2\frac{m_2-R_w}{P_i}e^{-m_2t} \tag{67}$$

が得られ，（64），（67）において初期値をΔS_w（t_0），ΔS_i（t_0）とおくと，定数C_1，C_2が以下のように求まる．

$$C_1=\frac{R_i\Delta S_w(t_0)-P_i\Delta S_i(t_0)}{R_w+R_i} \tag{68}$$

$$C_2=\frac{R_w\Delta S_w(t_0)+P_i\Delta S_i(t_0)}{R_w+R_i} \tag{69}$$

さらに（68）と（69）を（64）に代入し整理すると$\Delta S_w(t)$の関数形が得られる．

$$\Delta S_w(t)=\Delta S_w(t_0)-\frac{R_w\Delta S_w(t_0)+R_i\Delta S_i(t_0)}{R_w+R_i}[1-e^{-(R_w+R_i)t}] \tag{70}$$

同様にして，（68）と（69）を（67）に代入し，近似式（65）を利用すると$\Delta S_i(t)$の関数形が以下のように求まる．

$$\Delta S_i(t) = \Delta S_i(t_0) - \frac{P_w \Delta S_w(t_0) + R_i \Delta S_i(t_0)}{R_w + R_i}[1 - e^{-(R_w+R_i)t}] \tag{71}$$

5.4　積分の実行

式（50），（51）を積分してN_k, M_kを実際に求める手順を説明する．関数 n（x）およびz_k, z_{k+1} が**図 3** のような関係にあるとき，式（50），（51）は式（6）を利用して次のように計算できる．

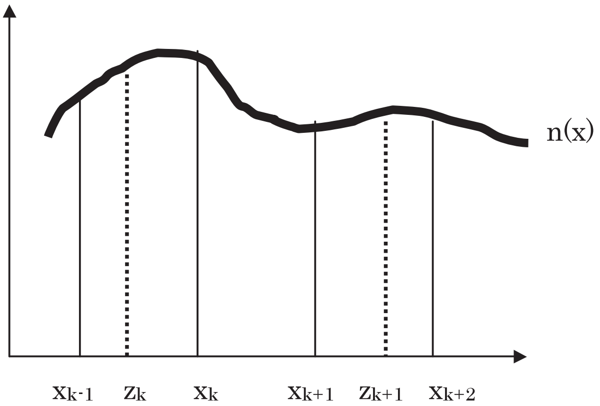

図 3　n（x）に対するx_k，z_kの位置関係の例
Fig. 3　An example of the relationship between n（x）, x_k and z_k.

$$N_k(t+\Delta t) = \int_{z_k}^{z_{k+1}} n(z,t)dz$$
$$= \int_{z_k}^{x_k} n(z,t)dz + \int_{x_k}^{x_{k+1}} n(z,t)dz + \int_{x_{k+1}}^{z_{k+1}} n(z,t)dz$$
$$= [(x_k{}^2 - z_k{}^2)\frac{\psi_{k-1} - f_{k-1}}{2x_{k-1}} + (x_k - z_k)(2f_{k-1} - \psi_{k-1})] + N_k$$
$$+[(z_{k+1}{}^2 - x_{k+1}{}^2)\frac{\psi_{k+1} - f_{k+1}}{2x_{k+1}} + (z_{k+1} - x_{k+1})(2f_{k+1} - \psi_{k+1})] \tag{72}$$

$$M_k(t+\Delta t) = \int_{z_k}^{z_{k+1}} (z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3} n(z,t)dz$$
$$= \int_{z_k}^{x_k} \frac{(z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3}}{z} zn(z,t)dz$$
$$+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3}}{z} zn(z,t)dz$$
$$+ \int_{x_{k+1}}^{z_{k+1}} \frac{(z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3}}{z} zn(z,t)dz$$
$$= x_k(f_{k-1} - \psi_{k-1})\int_{z_k}^{x_k} \frac{(z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3}}{z} dz$$
$$+(2\psi_{k-1} - f_{k-1})\int_{z_k}^{x_k} (z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3} dz$$
$$+x_{k+1}(f_k - \psi_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3}}{z} dz$$
$$+(2\psi_k - f_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} (z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3} dz$$
$$+x_{k+2}(f_{k+1} - \psi_{k+1})\int_{x_{k+1}}^{z_{k+1}} \frac{(z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3}}{z} dz$$
$$+(2\psi_{k+1} - f_{k+1})\int_{x_{k+1}}^{z_{k+1}} (z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3} dz \tag{73}$$

ここで式（73）における積分はそれぞれ以下のように解くことができる．

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{(z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3}}{z} dz = (v_{k+1}{}^3 - v_k{}^3) + 3b(v_{k+1} - v_k)$$
$$+\frac{3}{2}b^{3/2}(\ln\frac{v_{k+1} - \sqrt{b}}{v_k - \sqrt{b}} - \ln\frac{v_{k+1} + \sqrt{b}}{v_k + \sqrt{b}}) \quad （\mathrm{b} > 0） \tag{74}$$

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{(z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3}}{z} dz = (v_{k+1}{}^3 - v_k{}^3) + 3b(v_{k+1} - v_k)$$
$$+3\frac{b^2}{\sqrt{-b}}(\tan^{-1}\frac{z_{k+1}}{\sqrt{-b}} - \tan^{-1}\frac{z_k}{\sqrt{-b}}) \quad （\mathrm{b} < 0） \tag{75}$$

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} (z^{2/3} + \frac{2}{3}\tau_w)^{2/3} dz$$
$$= -3b^3[\frac{1}{32}\ln\left|\frac{u_{k+1}+1}{u_k+1}\right| - \frac{1}{32}\left\{(u_{k+1}+1)^{-1} - (u_k+1)^{-1}\right\}$$
$$+\frac{1}{16}\left\{(u_{k+1}+1)^{-2} - (u_k+1)^{-2}\right\} - \frac{1}{48}\left\{(u_{k+1}+1)^{-3} - (u_k+1)^{-3}\right\}$$
$$-\frac{1}{32}\ln\left|\frac{u_{k+1}-1}{u_k-1}\right| - \frac{1}{32}\left\{(u_{k+1}-1)^{-1} - (u_k-1)^{-1}\right\}$$
$$-\frac{1}{16}\left\{(u_{k+1}-1)^{-2} - (u_k-1)^{-2}\right\}$$
$$-\frac{1}{48}\left\{(u_{k+1}-1)^{-3} - (u_k-1)^{-3}\right\}] \tag{76}$$

ただし

$$b = \frac{2}{3}\tau_w \tag{77}$$

$$v_k = (z_k^{2/3} + b)^{1/2} \tag{78}$$

$$u_k = (1 + bz_k^{-2/3})^{1/2} \tag{79}$$

と置換している．

6．粒子の併合過程

6.1　方程式系

雲を構成する水滴や氷粒子がいろいろなサイズをもつとき，互いの落下速度に差が生じて粒子の衝突併合が起こる．質量x（断面積 $\pi R_x{}^2$）の粒子と，質量y（断面積 $\pi R_y{}^2$）の粒子とが衝突併合し得る空間の体積は，

$$K(x,y) = \pi(R_x{}^2 + R_y{}^2)|V(x) - V(y)|E_c \tag{80}$$

で表せる．ここでVは粒子の落下速度，E_cは併合効率である．このとき，質量xの1個の粒子がΔt秒間に質量yの粒子を併合する確率を，粒子yの密度関数 $n_2(y)$を用いて記述すると

$$\hat{P}=K(x,y)n_2(y)dy\Delta t \qquad (81)$$

となる．$\hat{P}$は確率であり，$0\le\hat{P}\le1$を前提にしている．$K(x,y)$や$n_2(y)$に大きな値が入るとき，$\hat{P}$が1を超えることが起こり得るが，その場合は単位時間に1つの粒子が2つ以上の粒子と併合することになり，ここではそのような状況を想定しない．従って$K(x,y)$や$n(y)$が大きな値をもつときは，Δtを充分小さくする必要がある．さて，質量xの粒子の密度関数を$n_1(x)$とすると，質量x〜dxのうちyと併合するものの個数は

$$\hat{P}n_1(x)dx=n_1(x)dxK(x,y)n_2(y)dy\Delta t \qquad (82)$$

となる．従って，$n_1(x)$の変化率は,0から∞まで積分することにより

$$\frac{dn_1(x)}{dt}=n_1(x)\int_0^{\infty}K(x,y)n_2(y)dy\equiv LOSS \qquad (83)$$

で表すことができる．（83）は，質量xの粒子が他の粒子と併合することにより，その数が減じる効果を表すものであり，これを*LOSS*項と定義する．一方，質量（x-y）の粒子と質量yの粒子が併合して，質量xの粒子の個数が増加する効果は，x-y＞yとするとき

$$\frac{dn_1(x)}{dt}=\int_0^{x/2}n_1(x-y)K(x-y,y)n_2(y)dy\equiv GAIN \qquad (84)$$

で表される．（84）を*GAIN*項と定義する．$K(x,y)$や$n_1(x)$, $n_2(x)$が特定の関数形をもつ場合，（83）や（84）が解析的に解けることもあるが，通常は数値的に近似解を求める．近似解の求め方はいろいろな研究者が提案しているが，ここではTzivion *et al*.（1987）が提案したマルチモーメント法を用いる．まず（84）をN_kの変化率で表すと，

$$\left(\frac{dN1_k}{dt}\right)_{GAIN}=\int_{x_k}^{x_{k+1}}dx\int_0^{x/2}n_1(x-y)K(x-y,y)n_2(y)dy$$

$$=\int_{x_k}^{x_{k+1}}dx\int_0^{x_k/2}n_1(x-y)K(x-y,y)n_2(y)dy$$

$$+\int_{x_k}^{x_{k+1}}dx\int_{x_{k/2}}^{x/2}n_1(x-y)K(x-y,y)n_2(y)dy$$

$$=I_1+I_2 \qquad (85)$$

z=x-yと置き換えると，（85）の第1項（I_1）は

$$I_1=\int_{x_k-y}^{x_{k+1}-y}dx\int_0^{x_k/2}n_1(z)K(z,y)n_2(y)dy$$

$$+\int_{x_k-y}^{x_k}dx\int_0^{x_k/2}n_1(z)K(z,y)n_2(y)dy$$

$$+\int_{x_k}^{x_{k+1}}dx\int_0^{x_k/2}n_1(z)K(z,y)n_2(y)dy$$

$$-\int_{x_k-y}^{x_{k+1}}dx\int_0^{x_k/2}n_1(z)K(z,y)n_2(y)dy \qquad (86)$$

$z\to x$と記号を変え

$$\int_a^b dx\int_c^d F(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b F(x,y)dx$$

なる変換を行い，さらに $x_{k+1}=2x_k$ の関係を利用すると

$$I_1=\int_0^{\pi/2}n_2(y)dy\int_{x_k-y}^{x_k}K(x,y)n(x)dx$$

$$+\int_0^{\pi/2}n_2(y)dy\int_{x_k}^{x_{k+1}}K(x,y)n(x)dx$$

$$-\int_0^{\pi/2}n_2(y)dy\int_{x_{k+1}-y}^{x_{k+1}}K(x,y)n(x)dx$$

$$=\sum_{i=1}^{k-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}n_2(y)dy\int_{x_k-y}^{x_k}K_{k-1,i}(x,y)n(x)dx$$

$$+\sum_{i=1}^{k-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}n_2(y)dy\int_{x_k}^{x_{k+1}}K_{k,i}(x,y)n(x)dx$$

$$-\sum_{i=1}^{k-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}n_2(y)dy\int_{x_{k+1-y}}^{x_{k+1}}K_{k,i}(x,y)n(x)dx \qquad (87)$$

が得られる．（85）の第2項（I_2）は，$z=2y$および

$$\int_a^b dx\int_a^x F(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b F(x,y)dx$$

なる変換を行うことにより，

$$I_2=\int_{x_k}^{x_{k+1}}dx\int_{x_{k/2}}^{x/2}n_1(x-y)K(x-y,y)n_2(y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}dx\int_{x_k}^{x}n_1(x-\frac{z}{2})K(x-\frac{z}{2},\frac{z}{2})n_2(\frac{z}{2})dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}n_2(\frac{z}{2})dz\int_z^{x_{k+1}}n_1(x-\frac{z}{2})K(x-\frac{z}{2},\frac{z}{2})dx \qquad (88)$$

ξ=x-$z/2$とし，またz=$2y$の関係式を用いて変形すると

$$I_2=\int_{x_{k-1}}^{x_k}n_2(y)dy\int_y^{x_{k+1}-y}n_1(\xi)K(\xi,y)d\xi \qquad (89)$$

さらに

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}dy\int_y^{x_k}F(x,y)dx=\frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}dy\int_{x_{k-1}}^{x_k}F(x,y)dx$$

および

$$\int_y^{x_{k+1}-y}=\int_y^{x_{k+1}}-\int_{x_{k+1}-y}^{x_{k+1}}$$

の関係を用いて

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}n_2(y)dy\int_{x_{k-1}}^{x_k}n_1(x)K_{k-1,k-1}(x,y)dx$$

$$+\int_{x_{k-1}}^{x_k}n_2(y)dy\int_{x_k}^{x_{k+1}}n_1(x)K_{k,k-1}(x,y)dx$$

$$-\int_{x_{k-1}}^{x_k}n_2(y)dy\int_{x_{k+1}-y}^{x_{k+1}}n_1(x)K_{k,k-1}(x,y)dx \qquad (90)$$

I_1とI_2の和から，*GAIN*項を以下のような形に書き直す

ことができる.

$$(\frac{dN1_k}{dt})_{GAIN} = \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} n_2(y)dy\int_{x_{k-1}}^{x_k} n_1(x)K_{k-1,k-1}(x,y)dx$$
$$+\sum_{i=1}^{k-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} n_2(y)dy\int_{x_k-y}^{x_k} K_{k-1,i}(x,y)n_1(x)dx$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} n_2(y)dy[\int_{x_k}^{x_{k+1}} K_{k,i}(x,y)n_1(x)dx$$
$$-\int_{x_{k+1}-y}^{x_{k+1}} K_{k,i}(x,y)n_1(x)dx] \tag{91}$$

物理的には，（91）の右辺第1項は*k-1*番目のビンに含まれる粒子同士の併合，第2項は*k-1*番目のビンに含まれる粒子がより小さい粒子を捕捉する効果，第3項は*k*番目のビンに含まれる粒子による捕捉の効果で，併合後に質量がx_{k+1}を超える粒子を除いている．式（91）を更に扱いやすくするため，併合カーネル$K(x, y)$を以下のように近似する.

$$K(x,y) = A_{k,i}(x+y) \tag{92}$$

ただし

$$A_{k,i} = [\frac{1}{(x_{k+1}-x_k)(x_{i+1}-x_i)}]\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{K(x,y)}{x+y}dx \tag{93}$$

粒径の大きな水滴同士の衝突カーネルは，（92）の関数形で近似できることが知られており（Long, 1974)，(92）の仮定は非現実的なものではない．（93）は台形公式を用いて以下のように解くことができる.

$$A_{k,i} = \frac{1}{4}\left\{\frac{K(x_{k+1},x_{i+1})}{x_{k+1}+x_{i+1}} + \frac{K(x_k,x_{i+1})}{x_k+x_{i+1}} + \frac{K(x_{k+1},x_i)}{x_{k+1}+x_i} + \frac{K(x_k,x_i)}{x_k+x_i}\right\} \tag{94}$$

（92）を代入し，さらに（6）の関数形を利用すると，(91）は次のような簡単な数式で表現することができる.

$$(\frac{dN1_k}{dt})_{GAIN} = \frac{1}{2}A_{k-1,k-1}\{N2_{k-1}M1_{k-1} + M2_{k-1}N1_{k-1}\}$$
$$+\sum_{i=1}^{k-2}A_{k-1,i}\left\{x_k\psi_{k-1}M2_i + \frac{1}{2}f_{k-1}M2_i^{\,2} - \frac{1}{2x_{k-1}}(\psi_{k-1}-f_{k-1})M2_i^{\,3}\right\}$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}A_{k,i}(N2_iM1_k + M2_iN1_k)$$
$$-\sum_{i=1}^{k-1}A_{k,i}\left\{x_{k+1}\psi_kM2_i + \frac{1}{2}f_kM2_i^{\,2} - \frac{1}{2x_k}(\psi_k-f_k)M2_i^{\,3}\right\} \tag{95}$$

ただし

$$N1_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} n_1(x)dx \tag{96}$$

$$N2_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} n_2(x)dx \tag{97}$$

$$M1_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} xn_1(x)dx \tag{98}$$

$$M2_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} xn_2(x)dx \tag{99}$$

である．また$M_k^{\,j}$の値はTzivion *et al*.（1987）により，

$$M_k^{\,j} = 1.0625\overline{x}_k^{\,j}M_k^{\,j} \tag{100}$$

で与えられ，ここに$\overline{x}_k^{\,j}$は

$$\overline{x}_k^{\,j} = \frac{M_k^{\,j}}{M_k^{\,j-1}} \tag{101}$$

である.

*M 1*の*GAIN*項についても同様の変形により

$$(\frac{dM1_k}{dt})_{GAIN}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} n_2(y)dy\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x+y)n_1(x)K_{k-1,k-1}(x,y)dx$$
$$+\sum_{i=1}^{k-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} n_2(y)dy\int_{x_k-y}^{x_k}(x+y)K_{k-1,i}(x,y)n(x)dx$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} n_2(y)dy[\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x+y)K_{k,i}(x,y)n(x)dx$$
$$-\int_{x_{k+1-y}}^{x_{k+1}}(x+y)K_{k,i}(x,y)n(x)dx]$$
$$= \frac{1}{2}A_{k-1,k-1}\left\{N2_{k-1}M1^2_{k-1} + 2M2_{k-1}M1_{k-1} + M2^2_{k-1}N1_{k-1}\right\}$$
$$+\sum_{i=1}^{k-2}A_{k-1,i}\left\{x_k^{\,2}\psi_{k-1}M2_i + M2_i^{\,2}(2x_k\psi_{k-1} - 2x_{k-1}\psi_{k-1} + \frac{1}{2}x_{k-1}f_{k-1})\right.$$
$$\left. -M_i^{\,3}(\psi_{k-1}-f_{k-1}) - \frac{M2_i^{\,4}}{2x_{k-1}}(\psi_{k-1}-f_{k-1})\right\}$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}A_{k,i}(M1_k^{\,2} + 2M1_kM2_i + M2_i^{\,2}N1_k)$$
$$-\sum_{i=1}^{k-1}A_{k,i}\left\{x_{k+1}^{2}\psi_kM2_i + M2_i^{\,2}(2x_{k+1}\psi_k - 2x_k\psi_k + \frac{1}{2}x_kf_k)\right.$$
$$\left. -M_i^{\,3}(\psi_k-f_k) - \frac{M2_i^{\,4}}{2x_k}(\psi_k-f_k)\right\} \tag{102}$$

と書くことができる.

粒子の損失を表す*LOSS*項（83）をN_k, M_kの変化率で表すと，

$$(\frac{dN1_k}{dt})_{LOSS} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} n_1(x)dx\int_0^{\infty} K(x,y)n_2(y)dy$$
$$= \sum_{i=1}^{i\max}\int_{x_i}^{x_{i+1}} n_2(y)dy\int_{x_k}^{x_{k+1}} n_1(x)A_{k,i}(x+y)dx$$
$$= \sum_{i=1}^{i\max}A_{k,i}(N2_iM1_k + M2_iN1_k) \tag{103}$$

$$(\frac{dM1_k}{dt})_{LOSS} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} xn_1(x)dx\int_0^{\infty} K(x,y)n_2(y)dy$$
$$= \sum_{i=1}^{i\max}\int_{x_i}^{x_{i+1}} n_2(y)dy\int_{x_k}^{x_{k+1}} n_1(x)A_{k,i}(x^2+xy)dx$$
$$= \sum_{i=1}^{i\max}A_{k,i}(N2_iM1_k^{\,2} + M2_iM1_k) \tag{104}$$

となる．式（95）と（103)，（102）と（104）をまとめると，併合による$N1_k$, $M1_k$の時間変化は

$$\frac{dN1_k}{dt} = (\frac{dN1_k}{dt})_{GAIN} - (\frac{dN1_k}{dt})_{LOSS} \tag{105}$$

$$\frac{dM1_k}{dt} = (\frac{dM1_k}{dt})_{GAIN} - (\frac{dM1_k}{dt})_{LOSS} \quad (106)$$

で計算される．このモデルでは4つの粒子カテゴリーがあるので，$n_1(x)$, $n_2(x)$ の組み合わせは全部で16通りであり，それぞれについて併合方程式を解く．

6.2　捕捉者、被捕捉者と生成物の関係

4つの粒子カテゴリー（水滴，氷晶，雪片，あられ）が相互に併合する場合の生成物を**表1**にまとめる．基本的なルールとして，違うカテゴリーの粒子が衝突した場合には，質量の大きい粒子の性質をもつ新しい粒子が生成されるものとする．ただし過冷却水滴が氷粒子と衝突した場合は，瞬間的に凍結してその性質を失う．また氷晶は他の氷粒子と併合することにより雪片を生成するものとする．なお捕捉粒子は質量の大きい方の粒子，被捕捉粒子は質量の小さい方の粒子を指す．

表1　捕捉粒子，被捕捉粒子と生成物の関係
Table 1　Relationships among collecting particles, collected particles and products.

捕捉粒子	被捕捉粒子	生成物
水滴	水滴	水滴
水滴	氷晶	あられ
水滴	雪片	あられ
水滴	あられ	あられ
氷晶	水滴	氷晶
氷晶	氷晶	雪片
氷晶	雪片	雪片
氷晶	あられ	雪片
雪片	水滴	雪片
雪片	氷晶	雪片
雪片	雪片	雪片
雪片	あられ	雪片
あられ	水滴	あられ
あられ	氷晶	あられ
あられ	雪片	あられ
あられ	あられ	あられ

6.3　水滴同士の併合

水滴同士の併合について，Long（1974）は以下のような併合カーネルの近似式を提示している．

$$K(x,y) = \begin{cases} 5.78\times10^3(x+y), & D_L > 100\mu m \\ 9.44\times10^9(x^2+y^2), & D_L \le 100\mu m \end{cases} \quad (107)$$

ここでx, yは水滴の質量で単位は g，D_Lは大きい方の水滴の直径である．一方，Low and List （1982a）は，直径100μmよりも大きな水滴同士の衝突実験を行い，併合効率E_cとして以下の値を示している．

$$E_c = \begin{cases} a[1+\frac{D_s}{D_L}]^{-2}\exp[-\frac{b\sigma E_T{}^2}{S_c}], & E_T < 5.0\mu J \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (108)$$

ただし a＝0.778, b＝2.61 × 10^6J^{-2}m^2，D_sは小さい方の水滴の直径，σ は水の表面張力でσ＝7.28 × 10^{-2}Nm^{-1}，E_Tは粒子の総エネルギーで

$$E_T = CKE + S_T - S_c \quad (109)$$

CKEは衝突の運動エネルギーで，水滴の落下速度をV_L, V_Sとしたとき

$$CKE = \frac{\rho_w \pi}{12}\frac{D_L{}^3 D_S{}^3}{D_L{}^3+D_S{}^3}(V_L - V_S)^2 \quad (110)$$

S_Tは水滴の表面エネルギーの和で

$$S_T = \sigma\pi(D_S{}^2 + D_L{}^2) \quad (111)$$

S_cは併合した水滴の表面エネルギーで

$$S_c = \sigma\pi(D_S{}^3 + D_L{}^3)^{2/3} \quad (112)$$

である．直径100μm以上の水滴の併合については（108）を（80）に代入して$K(x,y)$を計算し，それ以外についてはLongの近似式（107）を用いる．

6.4　大水滴と氷晶，雪片の衝突

0℃より冷たい空気中において，過冷却水滴が自分より質量の小さな氷晶または雪片と衝突する場合を考える．水滴の直径に対して氷晶が充分に小さいとき，氷晶は水滴の周囲を迂回して衝突しないことがある．Lew *et al*.（1985）はこの効果を理論的に計算し，衝突効率を示した．ここではLew *et al*.（1985）が示したグラフから値を読み取り，併合効率を以下のように与える．

$$E_c = \begin{cases} 1.0, & D_i > 100\mu m \\ 0.8+0.2\frac{D_i-50}{50}, & 100\mu m \ge D_i > 50\mu m \\ 0.5+0.3\frac{D_i-20}{30}, & 50\mu m \ge D_i > 20\mu m \\ 0.1+0.4\frac{D_i-10}{10}, & 20\mu m \ge D_i > 10\mu m \\ 0.1, & 10\mu m \ge D_i \end{cases} \quad (113)$$

D_iは氷晶の直径で単位はμmである．水滴と氷晶の併合は0℃以下で起こるものとし，水滴が氷晶を捕捉した瞬間に凍結してあられが生成すると仮定する．

6.5　大水滴とあられの衝突

過冷却水滴が，自分より質量の小さいあられを捕捉する際の併合効率については，これまで充分に調べられておらず，ここでは一定値E_c＝0.8を仮定する．この過程は0℃より冷たい空気中で起こるものとし，水滴があられを捕捉した瞬間に凍結して，あられの質量が増加する

と仮定する．

6.6　氷晶，雪片，あられによる水滴の捕捉

氷晶，雪片やあられが自分より質量の小さい水滴（主に雲粒）を捕捉する場合については，Hall（1980）に基づき併合効率を以下のように与える．

$$E_c = [1 - 0.20\{\log_{10} K_{Fr} - (\log_{10} K_{crit} + \sqrt{5})\}^2]^{1/2} \tag{114}$$

K_{Fr} は混合フルード数で

$$K_{Fr} = \frac{(v_i - v_s)v_s}{Dg} \tag{115}$$

で定義される．ここで v_i, v_s はそれぞれ氷晶と水滴の終端落下速度，D は氷晶の直径，g は重力加速度，K_{crit} は氷晶のReynolds数の関数で，

$$K_{crit} = \begin{cases} 5.52\,(N_{\mathrm{Re}})^{-1.12}, & N_{\mathrm{Re}} \le 5.0 \\ 1.53\,(N_{\mathrm{Re}})^{-0.325}, & N_{\mathrm{Re}} > 5.0 \end{cases} \tag{116}$$

で定義されている．

6.7　氷晶・雪片間の併合

氷晶同士，氷晶と雪片，雪片同士の衝突による併合効率は，Cotton *et al*.（1986）に従い，気温に依存して変化するものとし，

$$E_c = \min[10^{0.035(T-273.16)-0.7}, 0.2] \tag{117}$$

で与える．

6.8 氷晶－あられ，雪片－あられ，あられ同士の併合

あられが他の氷粒子と衝突して併合することは現実に起こり得ると考えられるが，その併合効率は研究がほとんどなく，実態は不明である．ここでは氷晶－あられ，雪片－あられ，あられ同士の併合効率を $E_c = 0.1$ と仮定する．

7．雨滴の衝突分裂

7.1　破片の分布関数

雨滴同士が衝突した場合，併合するか，または分裂するかのいずれかとなる．雨滴の衝突分裂は，雨滴の最大径を制限する効果をもつとともに，雨滴粒径分布の変動に重要な役割を果たしており，その取り扱いは非常に重要である．Low and List（1982a,b）は詳細な室内実験を行い，雨滴の衝突分裂の定式化を行っている（なおLow and List（1982b）の式の一部には印刷ミスがあり，List *et al*.（1987）が修正している）．直径 D_L の水滴と直径 D_s の水滴が衝突したとき，分裂して生じる破片の分布関数を $P(D; D_L, D_s)$ で表す．ここで直径がD～D＋dDの範囲にある破片の個数が $P(D; D_L, D_s)$ dDで表現される．雨滴の分裂の仕方は，その形態からフィラメント型，ディスク型，シート型の3つに分けられており，関数 $P(D; D_L, D_s)$ をそれぞれの成分の和として以下のように表す．

$$P(D; D_L, D_s) = R_f P_f + R_s P_s + R_d P_d \tag{118}$$

Rのついた項は各成分の寄与率で

$$R_f + R_s + R_d = 1.0 \tag{119}$$

である．

フィラメント型分裂による破片の分布関数を以下のように与えられる．

$$P_f(D; D_L, D_s) = H_{f1}\exp[-\frac{1}{2}(\frac{D-\mu_{f1}}{\sigma_{f1}})^2] + H_{f2}\exp[-\frac{1}{2}(\frac{D-\mu_{f2}}{\sigma_{f2}})^2] + \frac{H_{f3}}{D}\exp[-\frac{1}{2}(\frac{\ln D-\mu_{f3}}{\sigma_{f3}})^2] \tag{120}$$

ここで第1項は大きな水滴周辺にできる破片の数密度を表す．H_{f1} はその極大値であり，

$$H_{f1} = 50.8 D_L^{-0.718} \tag{121}$$

で，D_L の単位はcmである．また μ_{f1} は破片の直径の最頻値であり，

$$\mu_{f1} = D_L \tag{122}$$

とおく．このとき，H_{f1} と σ_{f1} の関係は誤差関数を用いて以下のように与えられる．

$$H_{f1}^{-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}[1 + erf(\frac{D_{coal} - D_L}{\sqrt{2}\sigma_{f1}})] \tag{123}$$

である．なお誤差関数は

$$erf(y_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y_0} e^{-y^2} dy \tag{124}$$

と定義される．（123）において σ_{f1} の初期推定値を $\sigma_{f1} = H_{f1}^{-1}$ とし，

$$\sigma_{f1,i+1} = \frac{1}{H_{f1}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}[1 + erf(\frac{D_{coal} - D_L}{\sqrt{2}\sigma_{f1,i}})] \tag{125}$$

より，繰り返し法によって σ_{f1} の値を決めることができる．また（120）の第2項は小さい水滴周辺にできる破片の数を表し，

$$H_{f2} = 4.18 D_S^{-1.17} \tag{126}$$

$$\mu_{f2} = D_S \tag{127}$$

および

$$\sigma_{f2} = (\sqrt{2\pi} H_{f2})^{-1} \tag{128}$$

である．なお D_S の単位は D_L 同様cmである．（120）の第3項は2つの水滴の間につくられる破片の数で，その直径の最頻値が

$$D_{ff3} = 0.241 D_S + 0.0129 \tag{129}$$

で与えられる．D_{ff3} と μ_{f3} との間に

$$\mu_{f3} = \ln D_{ff3} + \sigma_{f3}^2 \tag{130}$$

の関係があるとすると，第 3 項の極大値は

$$P_{f3}=\frac{H_{f3}}{D_{ff3}}\exp(-0.5\sigma_{f3}{}^2) \quad (131)$$

となる．Low and List（1982a）の実験結果により，P_{f3} の値は

$$P_{f3}=1.68\times10^5 D_S{}^{2.33},\ for\ \ D_S\le D_{S0} \quad (132)$$

$$P_{f3}=[43.4(D_L+1.81)^2-159.0]D_S{}^{-1} -3870(D_L-0.285)^2-58.1,\ for\ \ D_S\ge 1.2D_{S0} \quad (133)$$

で与えられている．ただし

$$D_{S0}=[(\bar{F}_{f1}-2)/a']^{1/b'} \quad (134)$$

である．（134）の $\bar{F}_{f1}$ は分裂によって生じる粒子の総数で

$$\bar{F}_{f1}=[-2.25\times10^4(D_L-0.403)^2-37.9]D_S{}^{2.5} +9.67(D_L+0.170)^2+4.95,\ for\ \ D_S\ge D_{S0} \quad (135)$$

$$\bar{F}_{f1}=a'D_S{}^{b'}+2,\ for\ \ D_S<D_{S0} \quad (136)$$

と定式化されている．なお $a'=1.02\times10^4$ ， $b'=2.83$ であり，$D_{S0} < D_S < 1.2D_{S0}$のときは（132）と（133）を内挿して P_{f3} を求める．（131）より

$$H_{f3}=P_{f3}D_{ff3}\exp(0.5\sigma_{f3}{}^2) \quad (137)$$

σ_{f3} の第一推定値を $\sigma_{f3,1}=10D_{ff3}$ として，

$$\sigma_{f3,i+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\bar{F}_f-2}{H_{f3}}\right)\left[1-erf\left(\frac{\ln D_0-\mu_{f3}}{\sqrt{2}\sigma_{f3,i}}\right)\right]^{-1} \quad (138)$$

により，繰り返し法で H_{f3} と σ_{f3} が推定できる．
シート型の分裂における分布関数は

$$P_S(D;D_L,D_s)=H_{S1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{D-D_L}{\sigma_{S1}}\right)^2\right] +\frac{H_{S2}}{D}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln D-\mu_{S2}}{\sigma_{S2}}\right)^2\right] \quad (139)$$

で表す．第 1 項は大きい水滴周辺の破片の数を表し，

$$H_{S1}=100\exp(-3.25D_S) \quad (140)$$

とおき，（125）で H_{f1} を H_{S1} に入れ替えることにより，σ_{S1} を求めることができる．（139）の第 2 項は，小さい破片の分布関数を表し，直径の最頻値は

$$D_{SS2}=0.254D_S{}^{0.413}\exp[(3.53D_S-2.51)(D_L-D_S)] \quad (141)$$

で与えられ，ピークの値は

$$P_{S2}=0.23D_S{}^{-3.93}D_L{}^{b''} \quad (142)$$

で与えられる．ただし

$$b''=14.2\exp(-17.2D_S) \quad (143)$$

である．このとき，（130），（131）と同様に

$$H_{S2}=P_{S2}D_{SS2}\exp(0.5\sigma_{S2}{}^2) \quad (144)$$

および

$$\mu_{S2}=\ln D_{SS2}+\sigma_{S2}{}^2 \quad (145)$$

の関係がある．σ_{S2} の第一推定値を $\sigma_{S2,1}=10D_{SS2}$ として，

$$\sigma_{S2,i+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\bar{F}_S-1}{H_{S2}}\right)\left[1-erf\left(\frac{\ln D_0-\mu_{S2}}{\sqrt{2}\sigma_{S2,i}}\right)\right]^{-1} \quad (146)$$

により，繰り返し法で求める．ただし

$$\bar{F}_S=5erf\left(\frac{S_T-2.53\times10^{-6}}{1.85\times10^{-6}}\right)+6 \quad (147)$$

である．
ディスク型分裂は

$$P_d(D;D_L,D_s)=H_{d1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{D-D_{dd1}}{\sigma_{d1}}\right)^2\right] +\frac{H_{d2}}{D}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln D-\mu_{d2}}{\sigma_{d2}}\right)^2\right] \quad (148)$$

で表す．第 1 項が表す破片分布における，直径の最頻値は

$$D_{dd1}=D_L\{1-\exp[-3.70(3.10-W_1)]\} \quad (149)$$

である．ただし

$$W_1=CKE\times S_c{}^{-1} \quad (150)$$

で，CKE と S_c はそれぞれ（110）と（111）に定義されている．またピーク値 H_{d1} は

$$H_{d1}=1.58\times10^{-5}CKE^{-1.22} \quad (151)$$

σ_{d1} は（125）と同様に，繰り返し法により求まる．また第 2 項が表す破片の直径の最頻値は，

$$D_{dd2}=\exp[(-17.4D_S-0.671)(D_L-D_S)]D_S \quad (152)$$

であり，ピークの値は

$$P_{d2}=8.84D_S{}^{-2.52}(D_L-D_S)^{b^*} \quad (153)$$

である．ただし

$$b^*=0.007D_S{}^{-2.54} \quad (154)$$

である． 以下，（144）と同様に

$$H_{d2}=P_{d2}D_{dd2}\exp(0.5\sigma_{d2}{}^2) \quad (155)$$

および

$$\mu_{d2}=\ln D_{dd2}+\sigma_{d2}{}^2 \quad (156)$$

の関係から，σ_{d2} の第一推定値を $\sigma_{d2,1}=10D_{dd2}$ として，

$$\sigma_{d2,i+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\bar{F}_d-1}{H_{d2}}\right)\left[1-erf\left(\frac{\ln D_0-\mu_{d2}}{\sqrt{2}\sigma_{d2,i}}\right)\right]^{-1} \quad (157)$$

より σ_{d2} の値を求める．ただし

$$\bar{F}_d = 297.5 + 23.7\ln CKE \tag{158}$$

である．

各タイプの分裂の寄与率は

$$R_f = \begin{cases} 1.11\times10^{-4} CKE^{-0.654}, & for\ \ CKE \ge CKE_0 \\ 1.0, & for\ \ CKE < CKE_0 \end{cases} \tag{159}$$

$$R_S = \begin{cases} 0.685\,\{1-\exp[-1.63(W_2 - W_0)]\}, & for\ \ W \ge W_0 \\ 0, & for\ \ W < W_0 \end{cases} \tag{160}$$

$$R_d = \begin{cases} 1-(R_f + R_S), & for\ \ R_f + R_S \le 1 \\ 0, & for\ \ R_f + R_S \le 1 \end{cases} \tag{161}$$

で表される．ただし $CKE_0 = 89.3\mu J$ ， $W = CKE \times S_T^{-1}$ ，$W_0 = 0.86$ である．

こうして求めた水滴の直径 D に関する分裂関数を，以下の式で質量 m に関する分裂関数に変換する．

$$P(m;x,y)dm = P(D;D_L,D_S)dD \tag{162}$$

7.2　数密度の変化率

前節で導いた分裂関数を用いて，水滴の衝突分裂に伴う数密度の変動を記述する式を導く．Feingold *et al*.（1988）によると，数密度関数 $n(m)$ の変動は，分裂関数 $P(m;x,y)$ を用いて以下のように記述できる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial n(m)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\int_0^\infty n(x)dx \\ &\times\int_0^\infty n(y)(1-E_c)K(x,y)P(m;x,y)dy \\ &-n(m)\int_0^\infty \frac{n(y)(1-E_c)K(m,y)}{m+y}dy\int_0^\infty xP(x;m,y)dy\end{aligned} \tag{163}$$

ここで E_c は（108）に与えられる水滴の併合効率である．右辺第1項は質量 x, y の粒子の衝突分裂による質量 m の粒子の増加率を，右辺第2項は質量 m の粒子自体が分裂して減少する率を表している．式（4）を利用して，（163）を N_k の変化率を表す式に変形すると，

$$\begin{aligned}\frac{dN_k}{dt} &= \sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{i-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} n(x)dx \\ &\times\int_{x_j}^{x_{j+1}} n(y)K(x,y)(1-E_c)dy\int_{x_k}^{x_{k+1}} P(m;x,y)dm \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i\max}\int_{x_i}^{x_{i+1}} n(x)dx \\ &\times\int_{x_i}^{x_{i+1}} n(y)K(x,y)(1-E_c)dy\int_{x_k}^{x_{k+1}} P(m;x,y)dm \\ &-\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{k}\int_{x_k}^{x_{k+1}} n(m)dm \\ &\times\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{n(y)(1-E_c)K(m,y)}{m+y}dy\int_{x_i}^{x_{i+1}} xP(x;m,y)dx \\ &-\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=k+1}^{i\max}\int_{x_k}^{x_{k+1}} n(m)dm \\ &\times\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{n(y)(1-E_c)K(y,m)}{m+y}dy\int_{x_i}^{x_{i+1}} xP(x;y,m)dx\end{aligned} \tag{164}$$

と書ける．右辺第1項はビンクラス i の粒子が *i-1* 以下の粒子と衝突分裂してビンクラス k の粒子が形成される効果，第2項はビンクラス i に属する粒子同士の衝突分裂の効果，第3項はビンクラス k の粒子が k または k よりも小さいクラスの粒子と衝突分裂して減じる効果，第4項はビンクラス k の粒子が k よりも大きいクラスの粒子と衝突分裂して減じる効果を表している．ここで分裂カーネル $Q(m;x,y)$ を

$$Q(m;x,y) = P(m;x,y)(1-E_c) \tag{165}$$

で定義し，数値的に扱いやすくするために

$$\bar{Q}_{k,i,j} = \frac{1}{(x_{i+1}-x_i)(x_{j+1}-x_j)(x_{k+1}-x_k)} \times\int_{x_i}^{x_{i+1}}dx\int_{x_j}^{x_{j+1}}dy\int_{x_k}^{x_{k+1}}Q(m;x,y)dm \tag{166}$$

とおく．数値計算では（166）は台形公式を用いて

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{k,i,j} = \frac{1}{8}\{&Q(x_k;x_i,x_j)+Q(x_k;x_i,x_{j+1})+Q(x_k;x_{i+1},x_j) \\ &+Q(x_k;x_{i+1},x_{j+1})+Q(x_{k+1};x_i,x_j)+Q(x_{k+1};x_i,x_{j+1}) \\ &+Q(x_{k+1};x_{i+1},x_{j+1})\}\end{aligned} \tag{167}$$

で計算される．（166）を代入して（164）を変形すると，

$$\begin{aligned}\frac{dN_k}{dt} &= \sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\bar{Q}_{kij}x_k(N_iM_j + M_iN_j) \\ &+\sum_{i=1}^{i\max} A_{ii}\bar{Q}_{kii}x_kN_iM_i \\ &-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{k} A_{kj}\bar{Q}_{ikj}x_i^2N_jN_k \\ &-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=k+1}^{i\max} A_{kj}\bar{Q}_{ijk}x_i^2N_jN_k\end{aligned} \tag{168}$$

M_k についても同様の変形により

$$\begin{aligned}\frac{dM_k}{dt} &= \sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\bar{Q}_{kij}\frac{3}{2}x_k^2(N_iM_j + M_iN_j) \\ &+\sum_{i=1}^{i\max} A_{ii}\bar{Q}_{kii}\frac{3}{2}x_k^2N_iM_i \\ &-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{k} A_{kj}\bar{Q}_{ikj}x_i^2N_jM_k \\ &-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=k+1}^{i\max} A_{kj}\bar{Q}_{ijk}x_i^2N_jM_k\end{aligned} \tag{169}$$

と表すことができる．なお A_{ki} は（93）に定義されている．

8.　水滴の凍結

単位時間に凍結する水滴の個数はその個数，質量，気温に依存し，下記の式で表すことができる．

$$\frac{dN_i}{dt} = N_w\frac{m}{\rho_w}A_f\exp[B_f(T_0 - T)] \tag{170}$$

ここで N_i は凍結水滴の個数，N_w は質量 m の水滴の個数，

A_f，B_f は実験から求められたパラメーターで $A_f = 10^{-4}\mathrm{cm^{-3}s^{-1}}$, $B_f = 0.66\mathrm{K^{-1}}$, T_0 は 0℃，T は気温である．ここで（dN_w/dt）=-（dN_i/dt）の関係を用いて（170）を N_w について解くと，

$$N_w(t+\Delta t) = N_w(t)\exp[-\frac{m}{\rho_w}A_f\exp\{B_f(T_0-T)\}\Delta t] \quad (171)$$

が得られる．これを用いると k 番目のビンサイズにおける Δt 秒後の水滴および氷粒子の個数と質量は

$$N_{wk}(t+\Delta t) = N_{wk}(t)\exp[-\frac{\bar{m}_k}{\rho_w}A_f\exp\{B_f(T_0-T)\}\Delta t] \quad (172)$$

$$M_{wk}(t+\Delta t) = M_{wk}(t) - \bar{m}_k N_{wk}(t)$$
$$[1-\exp\{-\frac{\bar{m}_k}{\rho_w}A_f\exp(B_f(T_0-T))\Delta t\}] \quad (173)$$

$$N_{ik}(t+\Delta t) = N_{ik}(t) + N_{wk}(t)$$
$$[1-\exp\{-\frac{\bar{m}_k}{\rho_w}A_f\exp(B_f(T_0-T))\Delta t\}] \quad (174)$$

$$M_{ik}(t+\Delta t) = M_{ik}(t) + \bar{m}_k N_{wk}(t)$$
$$[1-\exp\{-\frac{\bar{m}_k}{\rho_w}A_f\exp(B_f(T_0-T))\Delta t\}] \quad (175)$$

で表すことができる．ただし

$$\bar{m}_k = \frac{M_w(t)}{N_w(t)} \quad (176)$$

である．なお直径が 100 μm より大きい凍結水滴はあられに，それより小さいものは氷晶として分類する．

9. 2 次氷晶の生成

あられが雲粒を捕捉するとき，ある温度条件においてあられの表面がはがれて 2 次的な氷晶が生成される．この効果を，Mossop（1978）は以下のように定式化している．

$$\frac{dN_I}{dt} = 10^{-6}N_L N_S^{0.93} \quad (177)$$

N_I は新たに生成される氷晶の数，N_L はあられに着氷する水滴のうち 24 μm よりも大きなものの個数，N_S は着氷する水滴のうち 13 μm よりも小さいものの個数である．生成される氷晶の質量が x_I であるとすると，2 次氷晶の生成は以下のように定式化される．

$$\frac{dN_k}{dt} = \begin{cases} 10^{-6}N_L N_S^{0.93} f(T), & for\ \ k=1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (178)$$

$$\frac{dM_k}{dt} = \begin{cases} 10^{-6}N_L N_S^{0.93} f(T) x_1, & for\ \ k=1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (179)$$

$f(T)$ は 2 次氷晶形成の気温依存性を表す関数で，Cotton *et al.*（1986）によって以下のように与えられている．

$$f(T) = \begin{cases} 0, & T > 270.16 \\ \frac{270.16-T}{2}, & 270.16 \ge T > 268.16 \\ \frac{T-265.16}{3}, & 268.16 > T \ge 265.16 \\ 0, & 265.16 > T \end{cases} \quad (180)$$

10．氷粒子の融解

Mason（1971）によると，氷粒子の融解速度は，融解による潜熱の解放と熱拡散および水蒸気の蒸発とのバランスから

$$\frac{dm}{dt} = -2\pi D f_m\{\kappa(T-T_0) + L_v\psi(\rho_v - \rho_{v0})\}/L_f \quad (181)$$

で表せる．ただし f_m は通風係数で

$$f_m = 1.6 + 0.3N_{\mathrm{Re}}^{\ 0.5} \quad (182)$$

と表される．また D は氷粒子の直径，π は円周率，κ は熱拡散係数，L_v，L_f は蒸発および融解の潜熱，ψ は水蒸気の分子拡散係数，ρ_v は水蒸気の密度，ρ_{v0} は氷粒子表面での水蒸気密度で，ρ_{v0} として 0℃における飽和水蒸気密度を用いる．今，

$$D = (\frac{6}{\rho_i\pi})^{1/3}m^{1/3} \quad (183)$$

を利用して（181）を

$$\frac{dm}{dt} = I(t)m^{1/3} \quad (184)$$

の形で表すと

$$I(t) = -\frac{2f_m}{L_f}(\frac{6\pi^2}{\rho_i})^{1/3}\{\kappa(T-T_0) + L_v\psi(\rho_v-\rho_{v0})\} \quad (185)$$

となる．（184）の両辺を t ～ $t+\Delta t$ まで積分すると

$$\int_{m(t)}^{m(t+\Delta t)} m^{-1/3}dm = \int_t^{t+\Delta t} I(t)dt$$

より

$$m(t+\Delta t) = \{m^{2/3}(t) + \frac{2}{3}I(t)\Delta t\}^{2/3} \quad (186)$$

が得られる．従って，融解による，時刻 $t+\Delta t$ における氷粒子の個数および質量は，k 番目のビンクラスについて

$$M_{ik}(t+\Delta t) = N_{ik}(t)\{\bar{m}^{2/3}(t) + \frac{2}{3}I(t)\Delta t\}^{2/3} \quad (187)$$

$$N_{i,k}(t+\Delta t) = N_{ik}(t) + \{M_{ik}(t+\Delta t) - M_{ik}(t)\}/\bar{m}_k \quad (188)$$

と書ける．ただし

$$\bar{m}_k = \frac{M_i(t)}{N_i(t)} \quad (189)$$

である．なお融解する際における氷粒子からの水の剥離や，融解に伴う水滴の分裂は，その実態が充分に解明されていないためここでは考慮せず，融解した氷粒子が同じサイズの水滴に変換されるものと仮定する．

11．粒子の落下速度

水滴，氷結，雪片，あられはそれぞれ空気に相対的に落下するものと仮定する．直径 D_w の水滴の終端落下速度は，Beard （1976）に基づき以下のように与える．

$$V_r = \begin{cases} C_1 C_{SC} D_w^2, & 0.5\mu m \le D_w \le 19\mu m \\ \eta N_{\mathrm{Re1}} / (\rho D_w), & 19\mu m \le D_w \le 1.07mm \\ \eta N_{\mathrm{Re2}} / (\rho D_w), & 1.07mm \le D_w \le 7mm \end{cases} \tag{190}$$

ここで C_1，C_{SC} はそれぞれ

$$\mathrm{C_1} = \Delta\rho \mathrm{g} / (18\eta) \tag{191}$$

および

$$\mathrm{C_{SC}} = 1 + 2.51(\mathrm{l}/\mathrm{D_w}) \tag{192}$$

で与えられる．ただし $\Delta\rho$ は水と空気の密度差で

$$\Delta\rho = \rho_w \text{-} \rho \tag{193}$$

で与えられる．また l は

$$\mathrm{l} = \mathrm{l_0}(\eta/\eta_0)(\mathrm{p_0/p})(\mathrm{T/T_0})^{1/2} \tag{194}$$

であり，$\mathrm{l_0}=6.62\times10^{-6}$cm，$\mathrm{p_0}=1013.25$hPa，$\eta_0=0.0001818$ gcm^{-1}s^{-1}，$\mathrm{T_0}=273.15$K である．なお η は空気の動粘性係数である．また $\mathrm{N_{Re1}}$，$\mathrm{N_{Re2}}$ は Reynolds 数で，Beard（1976）は以下のように与えている．

$$\mathrm{N_{Re1}} = \mathrm{C_{SC}} \exp(\mathrm{Y1}) \tag{195}$$

$$\mathrm{N_{Re2}} = \mathrm{N_p}^{1/6} \exp(\mathrm{Y2}) \tag{196}$$

係数はそれぞれ

$$\mathrm{Y_1} = \mathrm{a_0} + \mathrm{a_1 X_1} + \ldots\ldots + \mathrm{a_6 X_1}^6 \tag{197}$$

$$\mathrm{X_1} = \ln(\mathrm{N_{Da}}) \tag{198}$$

$$\mathrm{N_{Da}} = \mathrm{C_2 D_w}^3 \tag{199}$$

$$\mathrm{C_2} = 4\rho\Delta\rho \mathrm{g} / (3\eta^2) \tag{200}$$

$$\mathrm{N_p} = \sigma^3 \rho^2 / (\eta^4 \Delta\rho \mathrm{g}) \tag{201}$$

$$\mathrm{Y_2} = \mathrm{b_0} + \mathrm{b_1 X_2} + \ldots + \mathrm{b_5 X_2}^5 \tag{202}$$

$$\mathrm{X_2} = \ln(\mathrm{B_o N_p}^{1/6}) \tag{203}$$

$$\mathrm{B_o} = \mathrm{C_3 D_w}^2 \tag{204}$$

$$\mathrm{C_3} = 4\Delta\rho \mathrm{g} / 3\sigma \tag{205}$$

$$\sigma = 76.1 - 0.155(\mathrm{T\text{-}T_0}) \tag{206}$$

であり，定数は

$\mathrm{a_0}=-0.318657\times10$，$\mathrm{a_1}=0.992696$，
$\mathrm{a_2}=-0.153193\times10^{-2}$，$\mathrm{a_3}=-0.987059\times10^{-3}$，
$\mathrm{a_4}=-0.578878\times10^{-3}$，$\mathrm{a_5}=0.855176\times10^{-4}$，
$\mathrm{a_6}=-0.327815\times10^{-5}$，
$\mathrm{b_0}=-0.500015\times10$，$\mathrm{b_1}=0.523778\times10$，
$\mathrm{b_2}=-0.204914\times10$，$\mathrm{b_3}=0.475294$，
$\mathrm{b_4}=-0.542819\times10^{-1}$，$\mathrm{b_5}=0.238449\times10^{-2}$

で与えられる．

氷粒子の落下速度は，Locatelli and Hobbs （1974）の経験式を用いる．氷晶については濃密雲粒付き樹枝状結晶の終端落下速度

$$V_i = 0.62 D^{0.33} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{0.5} \tag{207}$$

を与える．ここで D は粒子の最大径で単位は㎜，ρ は空気の密度，ρ_0 は地上における空気密度，V_i の単位は ms^{-1} である．雪片については雲粒のない角板，側面結晶，砲弾，角柱結晶の併合体に関する経験式

$$V_s = 0.69 D^{0.41} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{0.5} \tag{208}$$

を用いる．あられについては，円錐形のあられに関する落下速度の経験式

$$V_g = 1.2 D^{0.65} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{0.5} \tag{209}$$

を用いる．

12．雲力学モデルへの組み込み

12.1　方程式系

前章までは降水形成の素過程に関する数値モデリングについて述べた．これらのプロセスを雲力学モデルに組み込むことにより，大気の力学と雲物理の相互作用を調べることができる．ここでは Soong and Ogura （1973） が開発した2次元軸対称の雲力学モデルに，降水形成過程を組み込む手順を述べる．

円筒座標系における空気の運動方程式および連続の式は Soong and Ogura（1973）に従い，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial r} - w\frac{\partial u}{\partial z} - C_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi'}{\partial r} + F_r \tag{210}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u\frac{\partial w}{\partial r} - w\frac{\partial w}{\partial z} - C_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi'}{\partial z} + F_z + g\left(\frac{\theta'}{\theta} + 0.61 Q_v' - Q_c\right) \tag{211}$$

$$\frac{\partial r\bar{\rho}u}{\partial r} + \frac{\partial r\bar{\rho}w}{\partial z} = 0 \tag{212}$$

と書ける．ただし r, z はそれぞれ水平および鉛直座標，u, w は水平風速および鉛直風速，θ は温位，Π は無次元化された気圧，F_r および F_z は摩擦力，Q_v は水蒸気の混合比，Q_c は雲粒子の混合比の総和，ρ は空気の密度

である．バーのついた項は水平平均した量を，ダッシュのついた項は水平平均からのずれを表している．また温位および水蒸気の予報方程式は

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -u\frac{\partial \theta}{\partial r} - w\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{C_p \Pi}(L_v P_1 + L_I P_2 + L_S P_3) + D_{\theta'} \quad (213)$$

$$\frac{\partial Q_v'}{\partial t} = -u\frac{\partial Q_v}{\partial r} - w\frac{\partial Q_v}{\partial z} - P_1 - P_3 + D_{Qv'} \quad (214)$$

である．P_1，P_2，P_3はそれぞれ水蒸気→水，水→氷，水蒸気→氷の変換率を表し，L_V，L_I，L_Sは相変化に伴う潜熱である．$D_{\theta'}$，$D_{Qv'}$は渦拡散の効果を表している．

雲力学モデルに降水形成過程を導入するには，（210）～（214）に加えて雲核の数，氷晶核の数，水滴の数密度，水滴の混合比，氷晶の数密度，氷晶の混合比，雪片の数密度，雪片の混合比，あられの数密度，あられの混合比に関する，全部で10個の予報方程式が必要である．これらの予報方程式の形は，予報変数をAとするとそれぞれ

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -u\frac{\partial A}{\partial r} - w\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho} V_A A) + (\frac{\partial A}{\partial t})_{cloud} + D_A \quad (215)$$

となる．ただし V_A は該当する粒子の落下速度，$(\partial A/\partial t)_{cloud}$は降水形成過程に伴う変化率，$D_A$は渦拡散の効果を表す．

12. 2　計算例

前節に述べた雲力学モデルを用いて計算した結果の例を示す．方程式の解法はSoong and Ogura（1973）に示されている差分法を用いた．格子間隔は$\Delta r = \Delta z$=400m，時間刻みは$\Delta t = 4_s$，計算領域を水平25.6 km，鉛直20 kmとした．大気条件として，梅雨期の典型的な環境である2000年6月24日9時の鹿児島における高層観測データを用いた．積乱雲を発生させるため，初期擾乱として，最下層に半径2,000 m，厚さ1,000 m，周囲との温度差1 Kの飽和した空気塊を置いた．

計算開始から60分までの雲の時間変化を図4に示す．

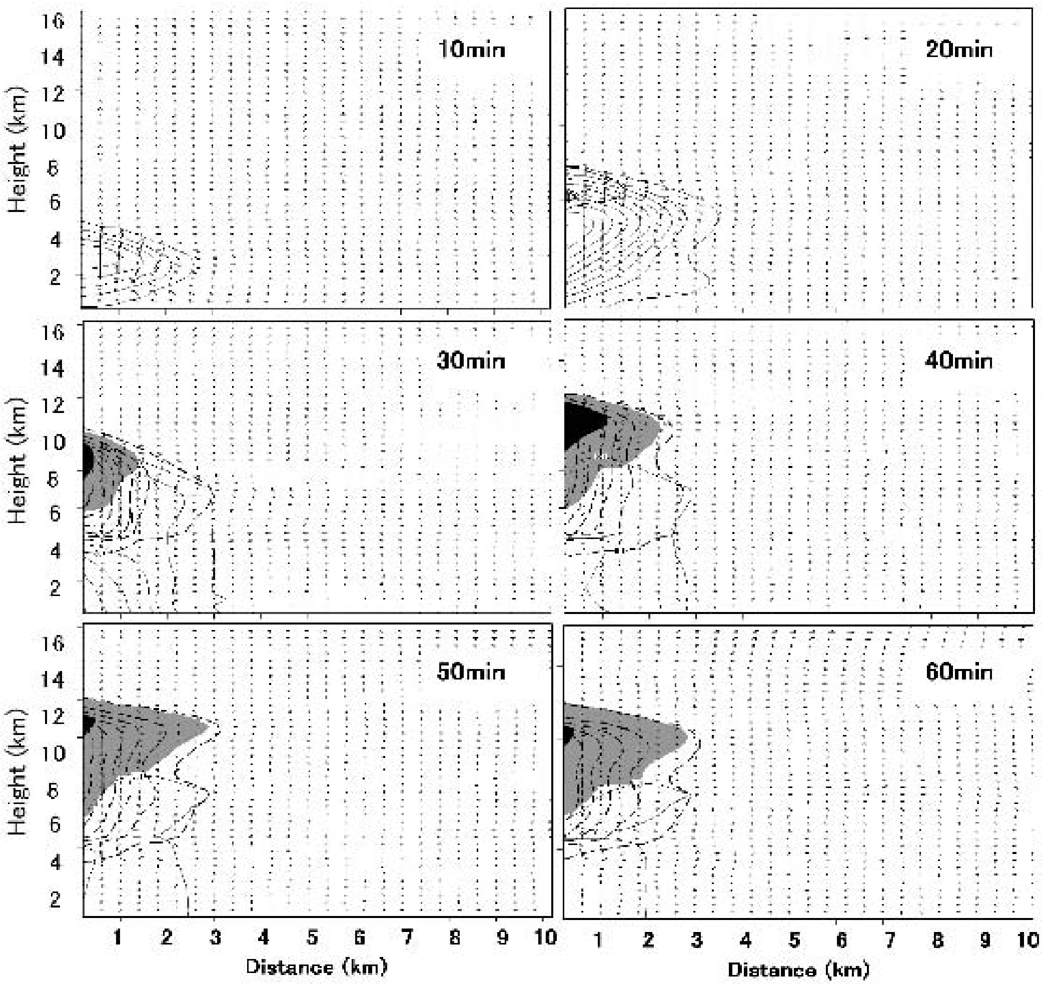

図4　数値モデルで計算した積乱雲の時間発展．矢印は風ベクトル，実線は水滴の混合比，破線はあられの混合比，陰影は氷晶＋雪片の混合比を示す．等値線は一番外側が0.1g/kgを示し，その内側は1 g/kgごとに描かれている．

Fig. 4　Evolution of the simulated convective cloud. Arrows indicate wind vectors, and the contours of the mixing ratio of drops（solid lines）, graupels （broken lines） and ice crystals plus snowflakes （shading） are shown. Outermost contours are 0.1 g/kg and other contours are drawn every 1 g/kg.

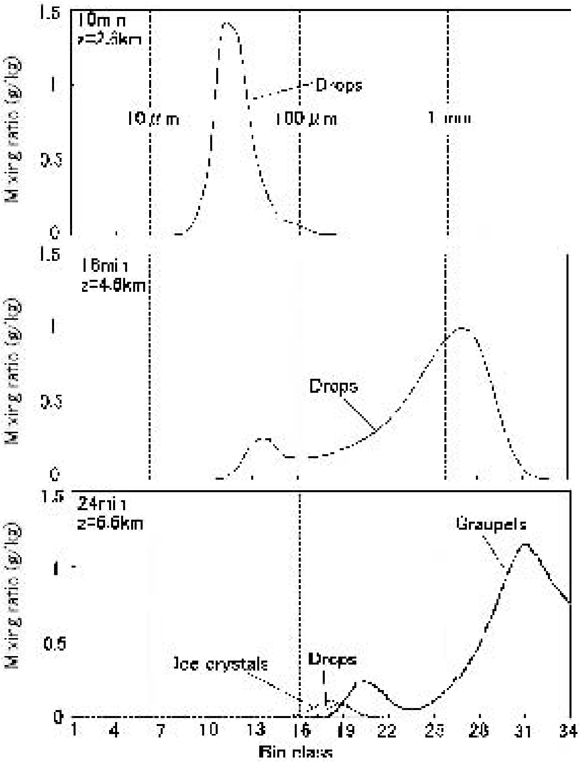

図 5　積乱雲の中心軸に沿って上昇する空気塊における，ビンごとの雲粒子の混合比

Fig.5　Mixing ratio of cloud particles at each bin in the air parcel rinsing in the center of the convective cloud.

ここで$x=0$が雲の中心軸を示している．初期擾乱として与えた暖かい空気塊が上昇流を形成し，水蒸気が凝結して水滴が出現する（10 分）．水滴はさらに混合比を増し，モデルの中心軸では 8 g / kg に達する（20 分）．また高度 6 km付近には，あられが形成され始める．30 分には水滴が雨として地上に落下してその混合比が減じ，一方上空ではあられや氷晶，雪片の混合比が増加している．40 分にはあられの混合比が 5 g / kg，氷晶・雪片の混合比が 2 g / kg に達する一方，水滴の混合比が 2 g / kg に減じて，雲の構成要素は氷粒子が中心となる．50 分から 60 分にかけて上層の氷粒子が融解しながら落下し，徐々に混合比が減じていく．

図 5 は積乱雲の中心軸を上昇する空気塊における，サイズごとの粒子の混合比を示している．10 分において高度 2.6 kmにある空気塊は，含まれる粒子のほとんどは直径が 100 μ m よりも小さい水滴であり，雲粒によって構成されていることがわかる．この空気塊は 16 分に高度 4.6 km に達し，そこでは水滴の径が増して直径 1 ㎜に達している．このことは，氷相過程を介さないいわゆる「暖かい雨」プロセスによって雨滴が生成されることを示している．空気塊が高度 6.6 km に達すると，水滴が凍結して，粒子の大部分はあられとなる．また量は少ないが，100 μ m を超える氷晶や，少量の過冷却水滴が共存している．

梅雨期の大気条件において，積乱雲の内部で暖かい雨プロセスで雨滴が生成され，それが凍結してあられを生成するという計算結果は非常に興味深いものである．この結果は，レーダー観測において初期エコーがしばしば 0℃ レベルよりも下の層に出現するという事実や（岸田，1967），梅雨期の積乱雲の上層に凍結雨滴が多数存在しているという観測事実（Takahashi *et al.*，2001）に整合しているものと考えられるが，詳しい調査は今後の課題である．

13．まとめ

雲を構成する粒子の粒径分布を仮定せず，粒径を複数のサイズ区分に分けて計算する方法（いわゆるビン法）を用い，氷相を含む降水形成過程を数値的に表現する方法を説明した．ここで構築した数値モデルは，マルチパラメータレーダーを用いた雲・降水観測の物理的な検証や，集中豪雨の発生機構の解明，気候モデルに用いられている雲物理パラメタリゼーションの検証等に非常に有効なツールとなる．なおこのモデルは，現状において最も進んだ雲物理モデルの 1 つであるが，氷粒子の形態の表現や，相互の併合効率，核形成の表現等に不確かな部分が多く含まれている．今後，各種の観測データを用いたモデルの検証とともに，特に氷粒子の成長をより適切に表現する手法の導入が必要である．

参考文献

1）Beard, K. V. （1976）: Terminal velocity and shape of cloud and precipitation drops aloft. J. Atmos. Sci., **33**, 851-864.

2）Chen J. -P. and Lamb, D. （1994）: Simulation of cloud microphysical and chemical processes using a multicomponent framework. Part I: Description of the microphysical model. J. Atmos. Sci., **51**, 2613-2630.

3）Cotton, W. R., Tripoli, G. J., Rauber, R. M. and Mulvihill, E. A. （1986）: Numerical simulation of the effects of varying ice crystal nucleation rates and aggregation processes on orographic snowfall. J. Clim. Appl. Meteor., **25**, 1658-1680.

4）Feingold, G., Tzivion, S. and Levin, Z. （1988）: Evolution of raindrop spectra. Part I: Sollution to the stochastic collection/breakup equation using the method of moments. J. Atmos. Sci., **45**, 3387-3399.

5）Ferrier, B. S., 1994: A double-moment multiple-phase four-class bulk ice scheme. Part I: Description. J. Atmos. Sci., **51**, 249-280.

6）Hall, W. D. （1980）: A detailed microphysical model within a two-dimensional dynamic framework: model description and preliminary results. J. Atmos. Sci., **37**, 2486-2507.

7）Ichimura, I., Fujiwara, M. and Yanase, T. （1980）: The size distribution of cloud droplets measured in small maritime cumulus clouds. J. Meteor. Soc. Japan, **58**, 403-415.

8) Kessler, E. (1969): On the distribution and continuity of water substance in atmospheric circulations. Meteor. Monogr. **32**, Amer. Meteor. Soc., 84pp.

9) 岸田恭允(1967):対流性降水の初期レーダー・エコーについて.天気,**14**, 197-201.

10) Lew, J. K., Kingsmill, D. E. and Montague, D. C. (1985): A theoretical study of the collision efficiency of small planar ice crystals colliding with large suppercooled water drops. J. Atmos. Sci., **42**, 857-862.

11) Lin Y. L., Farley, D. R. and Orville, H. D. (1983): Bulk parameterization of the snow field in a cloud cloud model. J. Clim. Appl. Meteor., **22**, 1065-1092.

12) List, R., Donaldson, N. R. and Stewart, R. E. (1987): Temporal evolution of drop spectra to collisional equilibrium in steady and pulsating rain. J. Atmos. Sci., **44**, 362-372

13) Locatelli, J. D. and Hobbs, P. V. (1974): Fall speeds and masses of solid precipitation particles. J. Geophys. Res., **79**-15, 2185-2197.

14) Long, A. B. (1974): Sollutions to the droplet collection equation for polynominal kernels. J. Atmos. Sci., **31**, 1040-1052.

15) Low, T. B. and List, R. (1982a): Collision coalescence and breakup of raindrops. Part I: Experimentally established coalescence efficiency and fragment size distribution in breakup. J. Atmos. Sci., **39**, 1591-1606.

16) Low, T. B. and List, R. (1982b): Collision coalescence and breakup of raindrops. Part II: Parameterization of fragment size distribution. J. Atmos. Sci., **39**, 1607-1618.

17) Mason, B. J. (1971): The physics of clouds (second edition), Oxford University Press, 671pp.

18) Meyers, M. P., DeMott, P. J. and Cotton, W. R. (1992): New primary ice-nucleation parameterization in an explicit cloud model. J. Appl. Meteor., **31**, 708-721.

19) Mossop S. C. (1978): The influence of drop size distribution on the production of secondary ice particles during graupel growth. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **104**, 323-330.

20) Murakami, M. (1990): Numerical modeling of dynamical and microphysical evolution of an isolated convective cloud - The 19 July 1981 CCOPE cloud. J. Meteor. Soc. Japan, **68**, 107-128.

21) Ogura, Y. and Takahashi, T. (1973): The development of warm rain in a cumulus model. J. Atmos. Sci., **30**, 262-277.

22) Okada, K., Ishizaka, Y. and Takada, T. (1986): Features and behavior of submicrometer aerosol particles in the urban atmosphere of Nagoya. J. Meteor. Soc. Japan, **64**, 755-763.

23) Pruppacher, H. R. and Klett, J. D. (1978):Microphysics of clouds and precipitation. D. Reidel Publishers, Dordrecht, 714pp.

24) Reisin, T., Levin, Z. and Tzivion, S. (1996): Rain production in convective clouds as simulated in an axisymmetric model with detailed microphysics. Part I: Description of the model. J. Atmos. Sci., **53**, 497-519.

25) Shiino, J. (1983): Evolution of raindrops in an axisymmetric cumulus model. Part I: Comparison of parameterized with non-parameterized microphysics. J. Meteor. Soc. Japan, **61**, 629-655.

26) Soong, S. T. (1974): Numerical simulation of warm rain development in an axisymmetric cloud model. J. Atmos. Sci., **31**, 1262-1285.

27) Soong, S. T. and Ogura, Y. (1973): A comparison between axisymmetric and slab symmetric cloud model. J. Atmos. Sci., **30**, 879-893.

28) Takahashi, T. (1976): Hail in axisymmetric cloud model. J. Atmos. Sci., **33**, 1579-1601.

29) Takahashi, T., Yamaguchi, N. and Kawano, T. (2001): Videosonde observation of torrential rain during Baiu season. Atmos. Res. **58**, 205-228.

30) Takeda, T. (1971): Numerical simulation of a precipitating convective cloud: The formation of a 'long-lasting' cloud. J. Atmos. Sci., **28**, 350-376.

31) Tzivion, S. Feingold, G. and Levin, Z. (1987): An efficient numerical solution to the stochastic collection equation. J. Atmos. Sci., **44**, 3139-3149.

(原稿受理:2003年9月30日)

要　旨

降水形成過程の数値モデリングの方法について説明する．ここで取り扱うプロセスは，雲粒・氷晶の核形成，水滴や氷粒子の拡散成長と蒸発（昇華），水滴の凍結，氷粒子の融解，水滴・氷粒子間の衝突併合過程，2 次氷晶の生成，雨滴の分裂，降水粒子の落下である．雲を構成する粒子を水滴，氷晶，雪片，あられの 4 つのカテゴリーに分け，それぞれのカテゴリーを 34 のサイズクラスに分割して取り扱う．このモデルを用いた積乱雲の数値シミュレーションの結果も示す．

キーワード：降水，雲物理，数値シミュレーション，ビン法，雨