防災科学技術研究所研究報告　第 66 号　2004 年 9 月

地震波処理用デジタル・フィルタ

木下繁夫*

Digital Filters for Seismic Signal Processing

Shigeo KINOSHITA

Yokohama City University,
Visiting Researcher of National Research Institute for Earth Science and Disaster Prevention, Japan

Abstract

This report describes digital filters for seismic signal processing. In the field of seismic data acquisition and seismic data processing, minimum-phase filters play an important role in order to retain the causality of seismic signals. The minimum-phase filters are required in particular for the conversion of seismic signals recorded by using linear-phase decimation filters to minimum-phase signals. Two methods for designing minimum-phase filters, Hilbert transform method and cepstrum method, are explained. Matlab programs for designing minimum-phase filters based on these two methods are also explained. Two applications of minimum-phase filter to the digital filter representations that are equivalent to site and path effects, and to the design of decimation filters, are explained. One application shows that site and path effects are realized by using minimum-phase filters. As the application of minimum-phase filters to the design of decimation filter, this report shows an example by using the CS5376 decimation filter manufactured by the Crystal Semiconductor.

Key words : Digital filter, Minimum-phase, Linear-phase, Decimation, Hilbert transform, Cepstrum

1. はじめに

ダブル・メジャーと言うにはいささか怯むが，digital filter と言う電気工学（信号処理）の道具が地震学における地震波の処理と解析の為にどのように用いられるかに関する報告を行う．もとより，この報告自体が，受託研究をベースにしており，実社会で役に立つことを目指している．故に，教科書的な，流麗で系統的な扱いとはほど遠く，実践的なものとなっている．このことは，初歩的な z 変換と digital filter の知識，及び，応用ソフトウエアとして Matlab のプログラミングの知識を読む人に要請している（但し，本文中の Matlab プログラムは，決してプロが作成するようなエレガントなものではなく，初歩的なコマンドを用いて初心者用に書かれており，理解しやすいものとしている．これは，意識したものではなく，筆者の実力がその程度であることを物語るものである．念のため，書き添える）．

この小文は，2 つの部分から構成されている．一つは，本報告の理論的背景とでも言うべきものであり，FIR 型の linear-phase filter から FIR 型の minimum-phase filter を設計する方法の説明であり，4 つの方法，零点の再配置法，cepstrum を用いる方法，Hilbert 変換を用いる方法，及び，decimation 間隔を調整する方法が述べられている．特に，cepstrum を用いる方法と Hilbert 変換を用いる方法は，次数の大きな FIR filter に対して実用的であり，詳しい例も示している．ここではその詳細を示さなかったが，decimation 間隔を調整する方法は，K-NET95 型強震計の decimation filter にも用いられており，ハードウエアに依存することもあるが，次数の大きな FIR filter にも耐えられるものである．これらは，地震記録という因果性を有する信号を処理する為に要請される技術であり，実際に，Σ-δ 型 1 ビット変調器に後続する decimation filter や linear-phase filter を通して得られた地震記録を minimum-phase 特性を有する因果的な地震記録に変換する処理技術である．さて，この小文で扱うもう一つの部

*横浜市立大学，独立行政法人　防災科学技術研究所　客員研究員
（前：独立行政法人　防災科学技術研究所　防災基盤科学技術研究部門）

分は，前半で説明した minimum-phase filter の応用であり，2つの例を示している．一つは，直達実体波の生成過程を等価な digital filter で表現する技術である．これには，地震波がその伝播過程で受ける変調が，どのような digital filter によるものかを，サイト効果と伝播経路効果について述べたものである．結論から言えば，この2つの効果は，minimum-phase filter を設計することと等価である．震源過程は，因果性の概念を持たない震源時間関数に対して，インパルス入力に対する filter 応答（特に，linear- phase filter の応答）という形で与えることを試みている．ここで述べる方法は，少なくとも，直達実体波に対して適用可能な技法であり，工学的な応用にその活用が期待されるものである．もう一つの応用例は，より実際的なものであり，市販されている CS5376 型 decimation filter に対する minimum-phase filter の設計である．

さて，この小文の大部分を占めている FIR 型 minimum-phase filter の設計のような仕事は，digital filter の設計という領域のごく小さな一部分であり，古典的とも言える課題である．昨今の流れから見れば，殆ど埋没している課題であろう．即ち，この仕事は，1970 年代の初期に萌芽したものであり，地震波や生体信号のような因果性を重んじる分野でその価値が再発見された課題である．特に，Σ-δ 型の 1bit 変調器に後続する decimation filter にその価値が見いだされたものである．従って，その内容に殆ど新規性はなく，ただ，まとまった書き物がないだけかもしれない．これに対し，5. で述べる地震波の生成過程の digital filter による表現には，若干ではあるが新規性が見いだせよう．勿論，現状ではどのように成長するか判断のつかない卵ではある．ただ，この様な独断的で奇異な内容の技術報告書を地震学教室の教官が作れるのは，今の一瞬に与えられた機会だけかもしれない．“一期は夢よ．ただ狂え．”と閑吟集は言う．

2. Digital filter－その一例 : sinc filter

全てのはじめに，2つの用語を定義しよう．因果性 (Causality) と安定性 (Stability) である．まず，z 変換表示された filter $H(z)$ のインパルス－応答 $\{h(k\Delta T)\}$ が，ΔT を標本化時間として，

$$h(k\Delta T) = 0\ ,\quad k < 0$$

なる条件を満たすとき，filter $H(z)$ は因果性を満たすと言う．また，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k\Delta T)| < \infty$$

なる条件 (absolutely summable と言う) は，filter $H(z)$ が安定性を有することの必要十分条件である．この2つの用語以外に，filter $H(z)$ の線形性 (Linearity) と非時変性 (Time-invariant) と言う重要な用語があるが，この報告で扱う範囲では陽に現れない．即ち，この2つの条件が全て満たされている filter のみを扱う．なお，以下では，一般性を失わない限り ΔT=1 とする．

本報告で設計目標とする filter は，線形で非時変特性を有し，安定で因果性を満足するものであるが，その検証法，特に，因果性と安定性の検証法には以下の方法が用いられる．まず，因果性の判定には，3.2 で述べるように，$h(k)$ の複素 cepstrum $c(k)$ を用いる．$k < 0$ において，$c(k) = 0$ となることが因果性の必要十分条件である．これについては，3.2 で例を含めて詳述しよう．また，安定性の判定には，偏自己相関係数（反射係数）κ を用いる．これは，まず，filter $H(z)$ の分母多項式の係数列から，偏自己相関係数から自己回帰過程の回帰係数を求める Durbin-Levinson のアルゴリズムを逆に利用して，κ を求める．このとき，filter $H(z)$ が安定性を満たす必要十分条件は，全ての κ が，$|\kappa| < 1$ となることである．この方法を本報告で直接使うことはないが，Schur-Cohn の判定法と言われる (Proakis *et al.,* 1996)．本報告では，この条件と等価である filter $H(z)$ の極が全て単位円内に存在すると言う条件を安定性の判定に用いる．Matlab のコマンド zplane が使いやすく，比較的精度良く極を求めることが出来るためである．但し，判定精度は Schur-Cohn の判定法が優る．これは，極を求める計算が，多項式を相反関係にある極に対応する2次形式に分解するベアストウ－ヒッチコック法のような非線形演算であることに対し，κ は線形演算で求まるためである．参考のため，Schur-Cohn の判定法を，function 文として，付録の CD-ROM に格納しておこう．

さて，前置きが長くなってしまったが，本題へ移ろう．まず，理想的な低域通過 filter $H(\lambda)$ を考えよう．$\lambda = \omega\Delta T(|\lambda| \le \pi)$ は正規化円振動数である．filter $H(\lambda)$ は，以下で定義されよう．

$$H(\lambda) = 1\ ,\quad |\lambda| \le \lambda_c$$
$$\quad = 0\ ,\quad \lambda_c < |\lambda| \le \pi$$

ここで，λ_c は遮断円振動数とする．このとき，filter のインパルス応答は，$H(\lambda)$ の逆 Fourier 変換で与えられる．即ち，

$$h(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\lambda)e^{ik\lambda}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} e^{ik\lambda}d\lambda = \frac{\sin(k\lambda_c)}{k\pi}\ ,\quad k \ne 0$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} d\lambda = \frac{\lambda_c}{\pi}\ ,\quad k = 0$$

となる．故に，

$$h(k) = \frac{\lambda_c}{\pi}\cdot \mathrm{sinc}(k\lambda_c)$$

となる．明らかに，$k < 0$ で $h(k) \ne 0$ となるから，この filter は因果性を満たさない．故に，計算機の内部の虚の世界で実現出来ても，物理的に実現不能である．現実問題として，$h(k)$ を時間軸上で正の方向にずらし，$k < 0$ で $h(k) = 0$ として打ち切り，因果性の問題を近似的に解決しても，得られる filter は，もはや理想的な低域通過 filter とはならず，Gibbs 現象が発現する．確認されたい．判るのは，理想的な低域通過 filter は，物理的に実現不能という事実のみである．

とはいえ，上記 $h(k)$ の様な sinc 関数型のインパルス応答を持つ filter は，低域通過 filter の特性を有するであろうし，捨てるには惜しい気がしよう．ここでは，digital filter の一例として，このような sinc 型の filter について述べよう．これは，実用問題において，特に，低次の sinc filter がしばしば利用されること，特に，ハードウエアの構成が容易で，評価ボードや実際の decimation filter に組み込まれることからも，digital filter の最初の例として受け入れられよう．ここでは，最初に，低次の sinc filter を，次に，高次の sinc filter について考えよう．勿論，この 2. で述べる digital filter は，FIR 型であり，その係数がインパルス応答となるものである．また，当然の事ながら因果性と安定性を満たしているものである．

最初の例として，$\lambda_c = \pi$ として，以下の sinc filter を考えよう．

$$h(k) = const.\times \mathrm{sinc}[2(k/3 - 1/2)\pi], k = 0,1,2,3$$

即ち，

$$y(x) = const.\times \mathrm{sinc}(x), |x| \le \pi$$

なる関数において，$y(x)$ を横軸に π だけ正方向へずらした関数である．但し，$\mathrm{sinc}(\pm\pi) = 0$ であるから，filter $\{h(k)\}$ は 2 つの係数からなる最小の sinc filter となることが判ろう．このとき，$const.$ = 1/0.8270 とすると，filter $\{h(k)\}$ は $1 + z^{-1}$ なる 1 次の sinc filter となる．これは移動平均 filter の一種である．

$$z = \exp[i\lambda]$$

とすれば，

$$1 + z^{-1} = 2\exp[-i\lambda/2]\cdot \cos(\lambda/2)$$

となるから，この filter は linear-phase 特性を有し，群遅延が 1/2 標本数となる．また，$(1 + z^{-1})^n$ が n 次の sinc filter となる．これが最も簡単な sinc filter の構成法であり，実用上有用な方法である．n = 4, 5 及び 6 次の sinc filter を書き下せば，以下となる．

$$H_4(z) = 1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}$$

$$H_5(z) = 1 + 5z^{-1} + 10z^{-2} + 10z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-5}$$

$$H_6(z) = 1 + 6z^{-1} + 15z^{-2} + 20z^{-3} + 15z^{-4} + 6z^{-5} + z^{-6}$$

この $H_4(z)$, $H_5(z)$ 及び $H_6(z)$ の sinc filter について振幅特性を示すと，これは，**図 2.1** となる．参考のため，**図 2.1** を求めるまでの m ファイル（sinc_chain.m）を以下に示しておこう．明らかに，Nyquist 周波数を遮断周波数としていることが判ろう．

```
% sinc_chain.m
clear all


norder=6;  % norder = 4,5 or 6
% Calculation of the 1st-order Sinc filter

% Impulse response (Filter coefficients)
N=1; NN=N/2;
x=linspace(0,N,4);           %  0 <= x <= 1
y=sinc((x-NN)/NN);           %  y = sin(pi*x)/(pi*x) for x~=0
                             %   = 1              for x==0
                             %  sin(-pi) <= y <= sin(pi)
yy([1:2])=y([2:3]);
yymax=max(yy)
yy=yy/yymax; y=y/yymax;
plot(x,y,'o:')
title('Normalized impulse response of the 1st-order Sinc filter')

% Magnitude reponse of nth-order Sinc filter
WN=32;
w=linspace(0,pi,WN);
w1=w/pi;
s=freqz(yy,1,w);      % Magnitude response of 1st-order
                      % Sinc filter
s=s.^norder;          % Magnitude response of nth-order
                      % Sinc filter

% Impulse response of nth-order Sinc filter: H(z)=(1+1/z)^n
b1=[1 4 6 4 1];        % n=4
b2=[1 5 10 10 5 1];    % n=5
b3=[1 6 15 20 15 6 1];  % n=6

% Magnitude response of the nth-order Sinc filter
s1=freqz(b1,1,w);
s2=freqz(b2,1,w);
s3=freqz(b3,1,w);

% Plotting of magnitude responses of Sinc filters
figure
plot(w1,20*log10(abs(s)),'o',w1,20*log10(abs(s1)),'-',w1,20*
log10(abs(s2)),':',w1,20*log10(abs(s3)),'-.')
title('Sinc filter chain');
xlabel('Frequency normalized by Nyquist freq.');
ylabel('Magnitude in dB')
legend('6th-order','4th-order','5th-order','6th-order');

% End of program
```

この様にして構成された sinc filter は linear-phase filter であり，全ての極が z 平面上の原点に，全ての零点が実軸上 -1 の位置に存在する．しかしながら，$H_6(z)$ でさえ，群遅延は 3 標本化時間である．

次に高次の sinc filter の例を示そう．**図 2.2** は，次数が 257，遮断周波数が Nyquist frequency を π としたとき，0.5 となる sinc filter を 2 段カスケードに接続した FIR 型 linear-phase filter である．以下，下記に示す Matlab 上でのプログラム（sinc2sample.m）に基づいて説明しよ

う．まず，プログラムでは，カスケード接続された FIR 型 sinc filter を自乗した filter の係数（インパルス応答）を表示し，linear-phase filter から同じ振幅特性を有する minimum-phase filter の係数を求めている．minimum-phase filter を求める方法は幾つかあるが，ここでは，後述する Hilbert 変換を用いる方法（function 文 mps.m と後続する逆 Fourier 変換）により，minimum-phase filter を求めている．得られた FIR 型 minimum-phase filter のインパルス応答を表示した後，zplane のコマンドを用いて，linear-phase filter の極－零点配置を示し，filter の利得特性を freqz のコマンドを用いて計算し，結果を表示する．最後に，得られた minimum-phase filter の極－零点配置を示し，filter の利得特性を表示している．簡単なプログラムであるから，一読すればその内容が判ろう．

```
% sinc2Sample.m
% Test program for calculating the minimum-phase sequence
% of sinc function
% Generation of sinc function
x=[0:1:256];
y=sinc(6.365*pi*x/256-3.1825*pi);
y=y.^2;

% Plottng of linear-phase 2nd-order sinc filter
plot(x,y)
figure

% Create minimum-phase filter
h=mps(fft(y));

% Generate minimum-phase sequence
hh=ifft(h);
hh=real(hh);

% Plotting of minimum-phase sequence
plot(x,hh)
figure

% Pole/zero diagram of linear-phase sequence
zplane(y,1)
figure

% Transfer function of linear-phase filter
[h1,w1]=freqz(y,1,512);
plot(w1,20*log10(abs(h1)));
title('Linear-phase sinc^2 FIR lowpass filter');
xlabel('Normalized angular frequency');
ylabel('Magnitude in dB');
figure

% Pole/zero diagram of minimum-phase sequence
zplane(hh,1)
figure

% Transfer function of minimum-phase filter
[h2,w2]=freqz(hh,1,512);
plot(w2,20*log10(abs(h2)));
title('Minimum-phase sinc^2 FIR lowpass filter');
xlabel('Normalized angular frequency');
ylabel('Magnitude in dB');

% End of program
```

結果の説明をしよう．特に，sinc filter の特徴及び FIR 型 linear-phase filter と FIR 型 minimum-phase filter の違いに注意して見ていこう．**図 2.2** に示した sinc filter を FIR 型の minimum-phase filter に変換したときのインパルス応答が**図 2.3** である．FIR 型の linear-phase filter から FIR 型の minimum-phase filter を求める方法については，3. と 4. で詳しく述べるので，ここでは結果の説明のみをしよう．まず，FIR 型の minimum-phase filter の係数は時間原点の近くに集中しており，minimum-phase の関数としての特徴を有していることが判ろう．次に，この様な filter における linear-phase 特性，或いは minimum-phase 特性かというような性質を見るには，所謂 filter の持つ極－零点配置を見るのが直感的である．これを以下に図示している．なお，以下の図では，○印を零点，×印を極とする．これは，Matlab 上で共通している．**図 2.4** は，**図 2.2** に示す FIR 型 linear-phase sinc filter の極－零点配置である．負の実軸上で，単位円外に一つの零点が存在するのが判ろう．この図では，原点付近の極－零点配置が読みとれないので，拡大したものを**図 2.5** に示そう．**図 2.4** と**図 2.5** から判ることは，単位円の外と内に相反関係にある零点の組が存在することであろう．FIR 型 linear-phase filter では，単位円上も含めて，単位円の内外に相反関係にある零点が存在する．

このFIR型linear-phase filterの振幅特性を，**図2.6** に示す．確かに，矩形関数に似ている通過帯域特性を示しているが，その振幅特性は，通過帯域ですら零周波数を最大として徐々に減衰していることが判ろう．従って，精度の高い低域通過 filter を作る場合，sinc filter のみからこれを構成することはかなり危険である．次段に補償用の filter を用意する必要が出てくることに留意しておこう．さて，FIR 型 minimum-phase filter へ変換した**図 2.3** の filter では，その極－零点配置が**図 2.7** の様になる．linear-phase filter と比較するならば，単位円外に極も零点も存在しないことが判ろう．単位円上の零点の扱いについては注意を要するが（**3.1** 参照），ここでは，便宜的ではあるが，**図 2.7** に示すように，単位円外に明瞭に存在しない極と零点からなる digital filter を minimum-phase filter と考えておこう．この FIR 型 minimum-phase filter の振幅特性を**図 2.8** に示す．**図 2.6** と比較して，ほぼ同一の振幅特性となるのが判ろう．

さて，ここまででは，sinc filter を 2 段カスケード接続し

た digital filter を linear-phase filter の場合と minimum-phase filter に分けて示してきたが，sinc filter の最後の例として，カスケード接続の段数をおもいきって 5 とした場合を見ておこう．**図 2.9** が FIR 型 linear-phase filter であり，ほぼ三角波に近いインパルス応答を示しているのが判ろう．極－零点配置を見ると，これは**図 2.10** ～**図 2.12** の様になり，明らかに単位円内と円外に配置されている相反な零点数が増えていることに気がつこう．**図 2.5** と比較するならば, より明瞭な相反関係となっているのが判ろう．また，**図 2.13** の振幅特性を見れば，通過帯域と阻止帯域間の減衰量が 150 dB 近くになっているのに気がつこう．

図 2.9 の FIR 型 linear-phase sinc filter から計算して得られる FIR 型 minimum-phase filter は，**図 2.14** となる．全ての極と零点が単位円内あることは，**図 2.15** から明らかであり，その振幅特性は，**図 2.16** の様になる．**図 2.13** の振幅特性と比較して，阻止帯域での特性が平坦となっているのは，通過帯域と阻止帯域の間の減衰量を 135dB になるようにプログラム上で制限を課して minimum-phase filter を計算した為である．これは，安定な filter を得るための技法である．なお，通過帯域の零周波数付近での振幅特性を**図 2.17** に示しておこう．これは，sinc filter の通過帯域は常に周波数の増加と伴に減少し，平坦な振幅特性が得られないことを明らかに示すものである．

さて，sinc filter では，平坦な通過帯域を得られないことを示してきたが，ここでは，FIR 型の最大平坦 filter と比較してみよう．但し，ここで言う最大平坦 filter は，いわゆる Butterworth filter ではなく，FIR 型 digital filter で最大平坦特性を近似したものである．従って，通過帯域には若干のリップル特性が生じるものである．ここで考える FIR 型　最大平坦 linear-phase filter は，これまで述べてきた sinc filter と同じ遮断周波数特性を有し，次数を 99 とする．得られた FIR 型最大平坦 linear-phase filter のインパルス応答が，**図 2.18** であり，その極－零点配置は，**図 2.19** となる．また，振幅特性を，**図 2.20** に示す．少なくとも，この図からは，通過帯域で平坦特性になっているように見えよう．**図 2.21**，**22** 及び **23** に minimum-phase に変換した最大平坦 filter を示す．**図 2.22** は，全ての極と零点が明らかに単位円内に存在し，linear-phase filter の極－零点配置図である**図 2.19** と比較して，minimum-phase filter としての特性を有していること示している．また，振幅特性を示す**図 2.23** は，sinc filter の振幅特性**図 2.16** と比較して，通過帯域が平坦であることも判ろう．この二つの FIR filter の次数は，sinc filter で 257，最大平坦 filter で 99 である．どちらの filter も通過帯域と阻止帯域間の減衰量が 135dB であり，より平坦な通過帯域を有する点から見れば，最大平坦 filter の方が sinc filter より優れているように思えるが，通過帯域と阻止帯域の間の遷移帯域の幅は sinc filter の方が優れており，最大平坦 filter では，例え次数を大きくしてもこの芸当は真似出来ない．

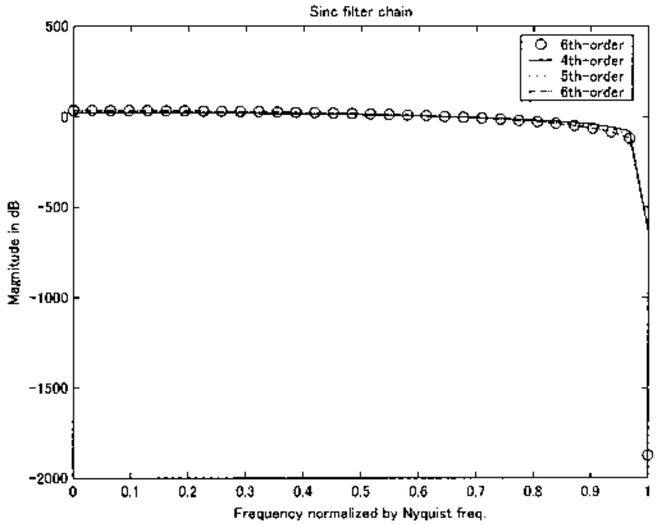

図 2.1　Sinc フィルタの振幅特性

Fig. 2.1　Magnitude responses of sinc filters.

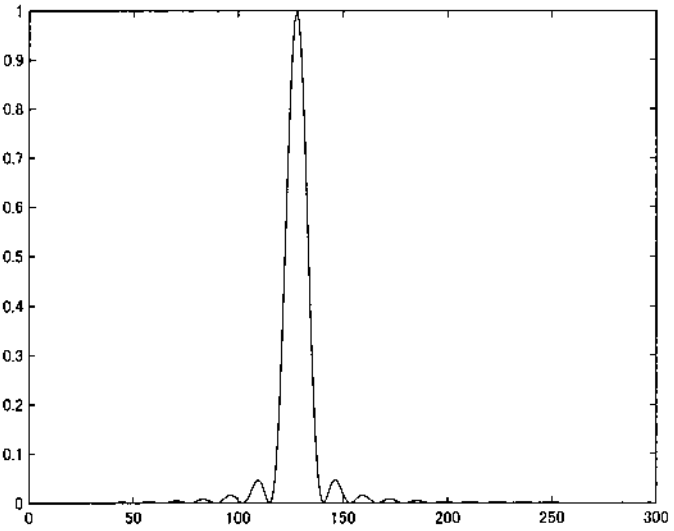

図 2.2　2 次の線形位相 sinc フィルタのインパルス応答

Fig. 2.2　Impulse response of second-order linear-phase sinc filter.

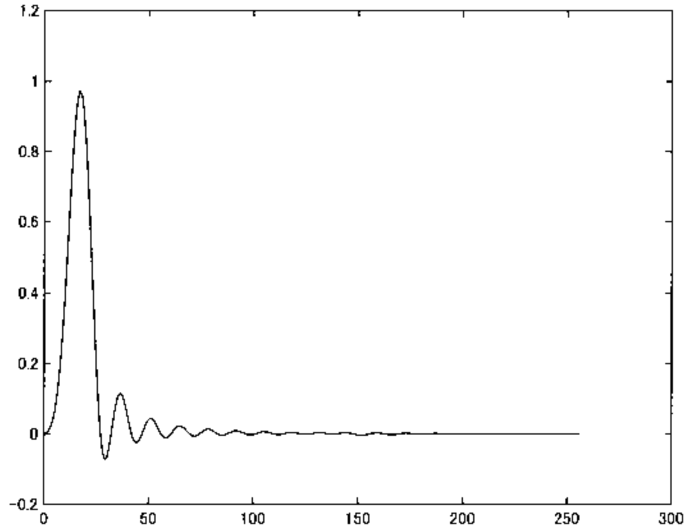

図 2.3　2 次の最小位相 sinc フィルタのインパルス応答

Fig. 2.3　Impulse response of second-order minimum-phase sinc filter.

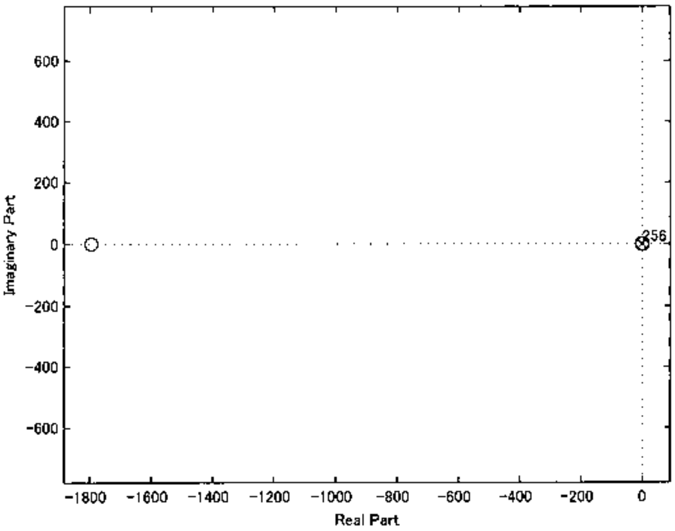

図 2.4　線形位相フィルタの極－零点配置図

Fig. 2.4　Pole/zero diagram for linear-phase filter.

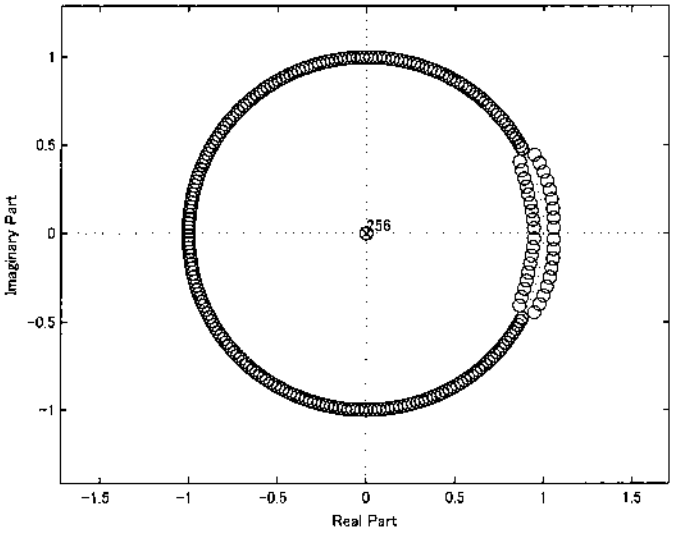

図 2.5　**図 2.4** の詳細極－零点配置図

Fig. 2.5　Pole/zero diagram detail of **Fig.2.4**.

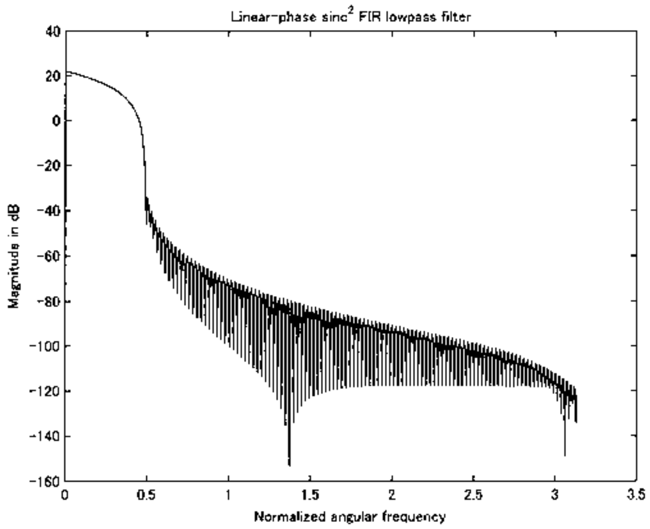

図 2.6　2 次の線形位相 sinc フィルタの振幅特性

Fig. 2.6　Magnitude response of second-order linear-phase sinc filter.

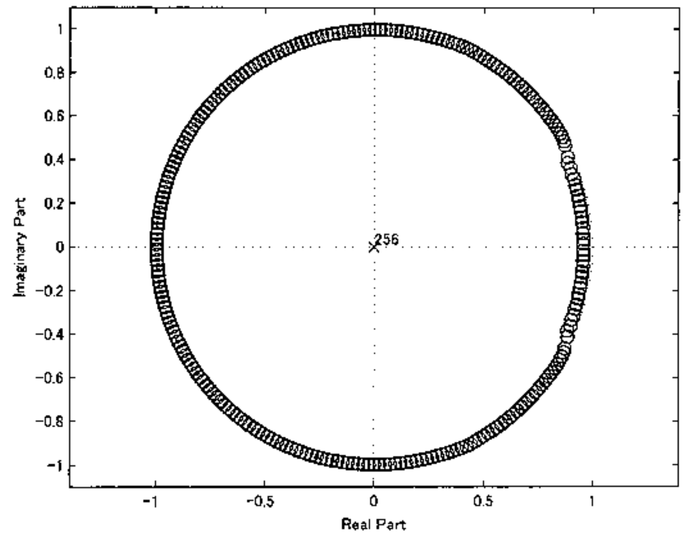

図 2.7　最小位相フィルタの極－零点配置図

Fig. 2.7　Pole/zero diagram of minimum-phase filter.

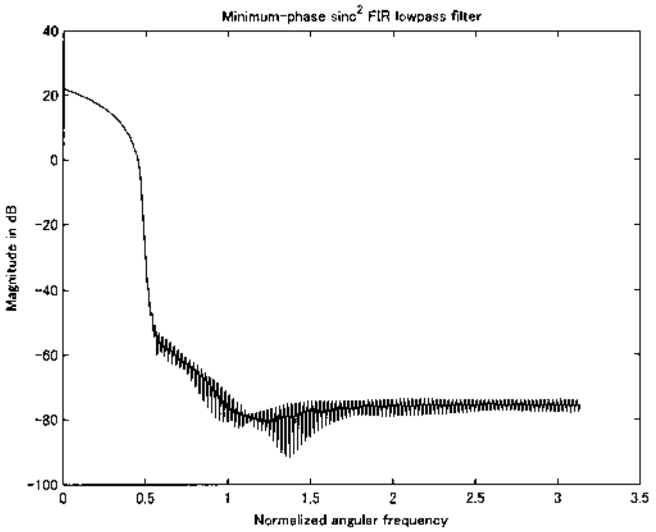

図 2.8　2 次の最小位相 sinc フィルタの振幅特性

Fig. 2.8　Magnitude response of second-order minimum-phase sinc filter.

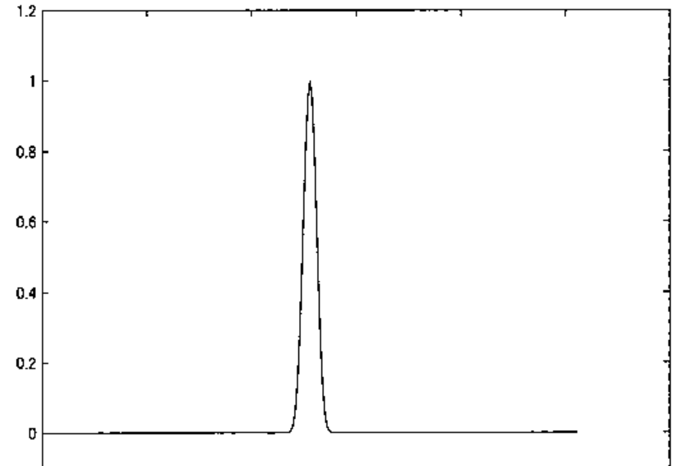

図 2.9　5 次の線形位相 sinc フィルタのインパルス応答

Fig. 2.9　Impulse response of fifth-order linear-phase sinc filter.

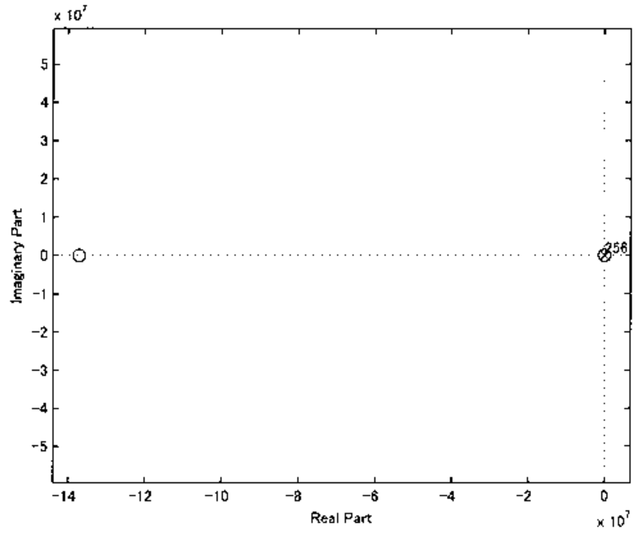

図 2.10　線形位相フィルタの極 - 零点配置図

Fig. 2.10　Pole/zero diagram of linear-phase filter.

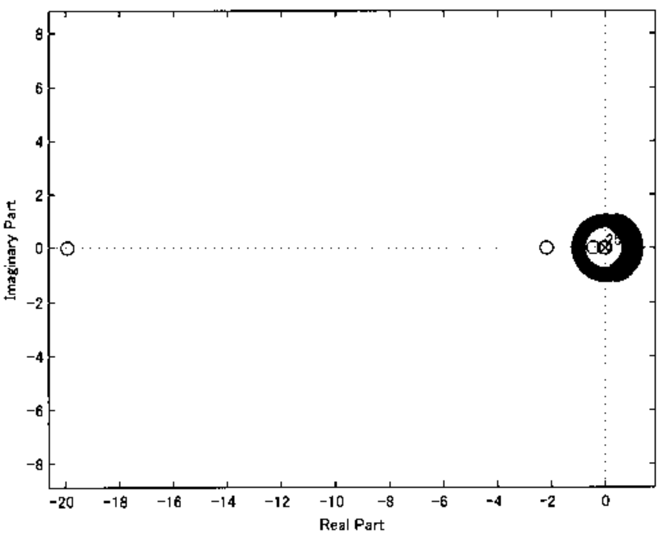

図 2.11　**図 2.10** の詳細極 - 零点配置図

Fig. 2.11　Pole/zero diagram detail of **Fig.2.10**.

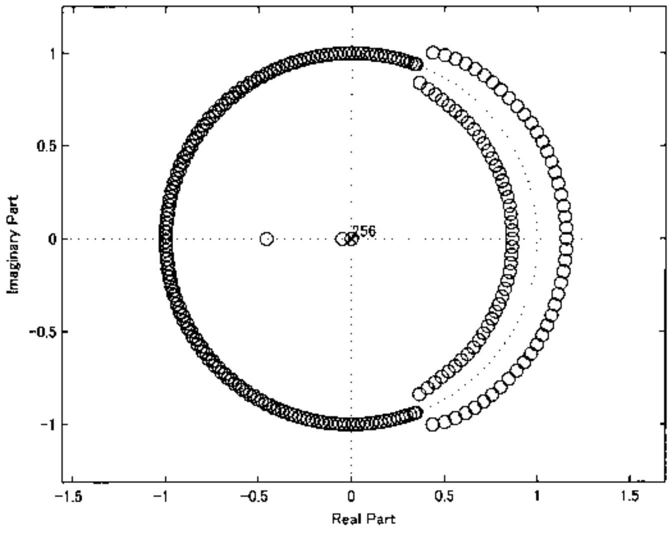

図 2.12　**図 2.11** の詳細極 - 零点配置図

Fig. 2.12　Pole/zero diagram detail of **Fig.2.11**.

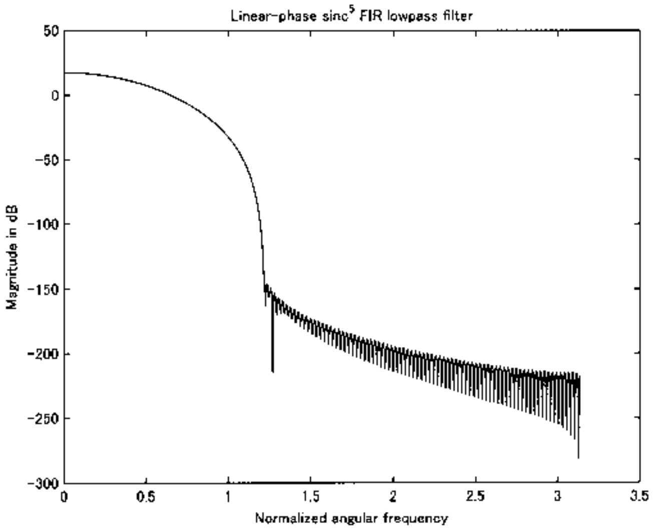

図 2.13　5 次の線形位相 sinc フィルタの振幅特性
Fig. 2.13　Magnitude response of fifth-order linear-phase sinc filter.

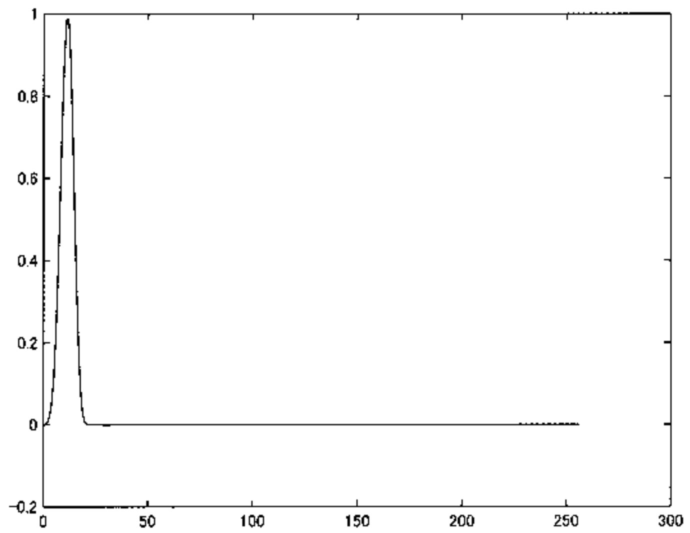

図 2.14　5 次の最小位相 sinc フィルタのインパルス応答
Fig. 2.14　Impulse response of fifth-order minimum-phase sinc filter.

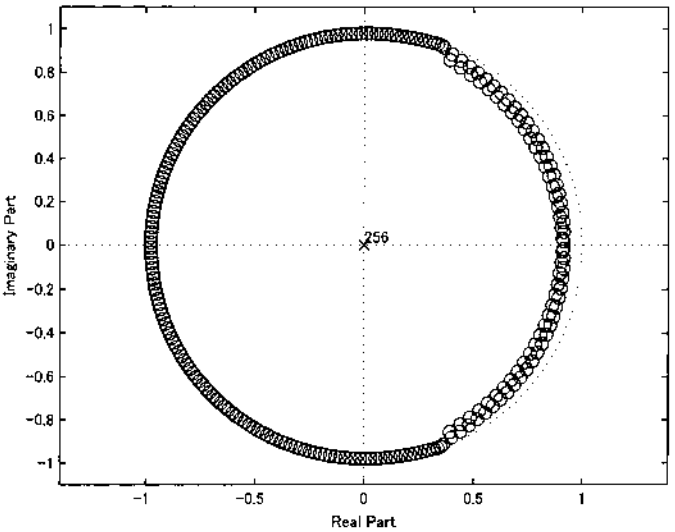

図 2.15　最小位相フィルタの極－零点配置図
Fig. 2.15　Pole/zero diagram of minimum-phase filter.

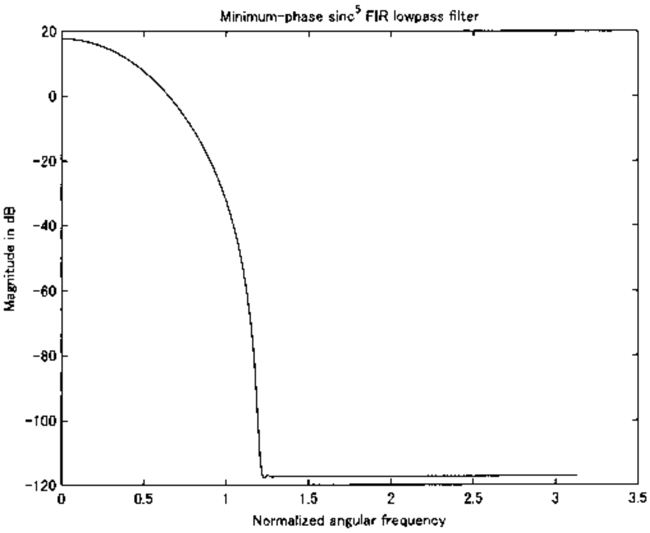

図 2.16　5 次の最小位相 sinc フィルタの振幅特性

Fig. 2.16　Magnitude response of fifth-order minimum-phase sinc filter.

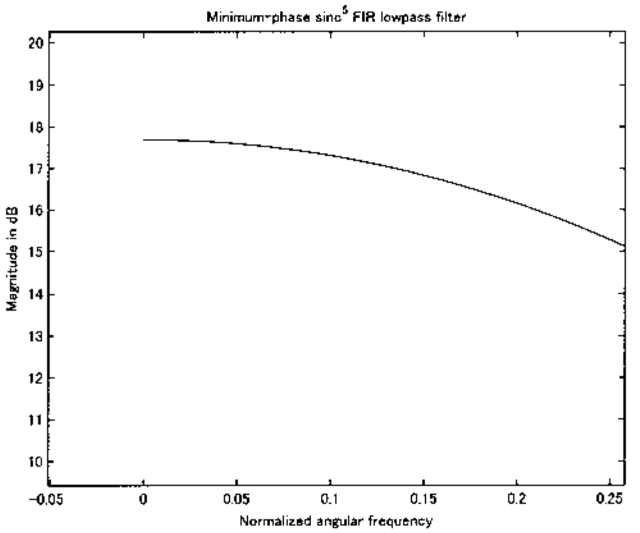

図 2.17　**図 2.16** の振幅特性における通過帯域の詳細図

Fig. 2.17　Pass-band detail of **Fig.2.16**.

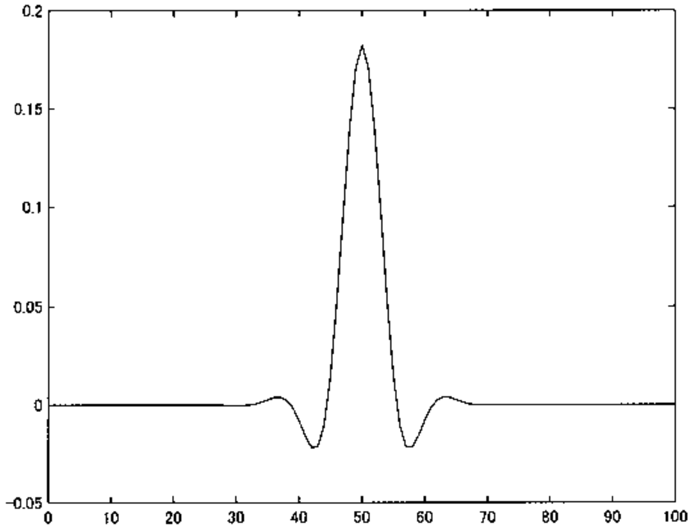

図 2.18　最大平坦 FIR 型線形位相フィルタのインパルス応答

Fig. 2.18　Impulse response of maximally flat FIR linear-phase filter.

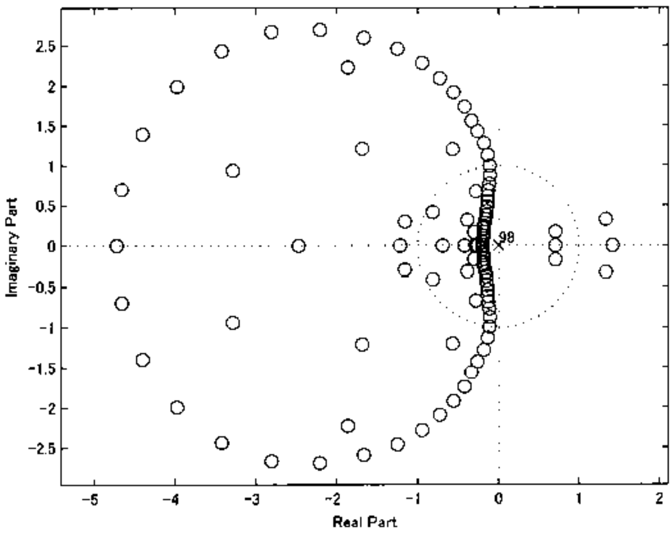

図 2.19　線形位相フィルタの極－零点配置図

Fig. 2.19　Zero/pole diagram of linear-phase filter.

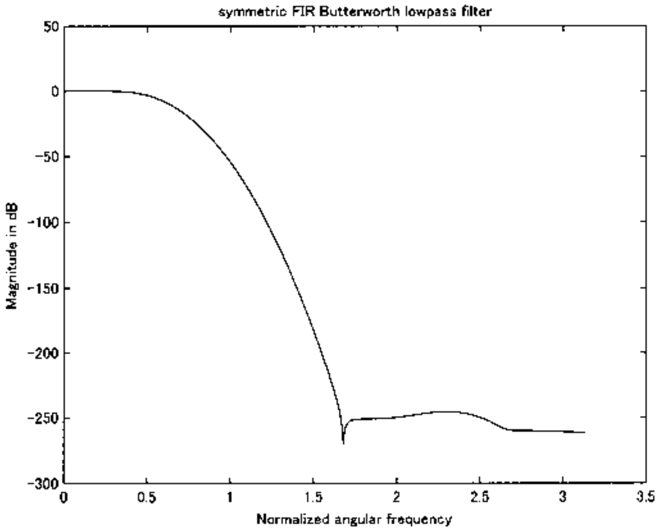

図 2.20　最大平坦 FIR 型線形位相フィルタの振幅特性

Fig. 2.20　Magnitude response of maximally flat FIR linear-phase filter.

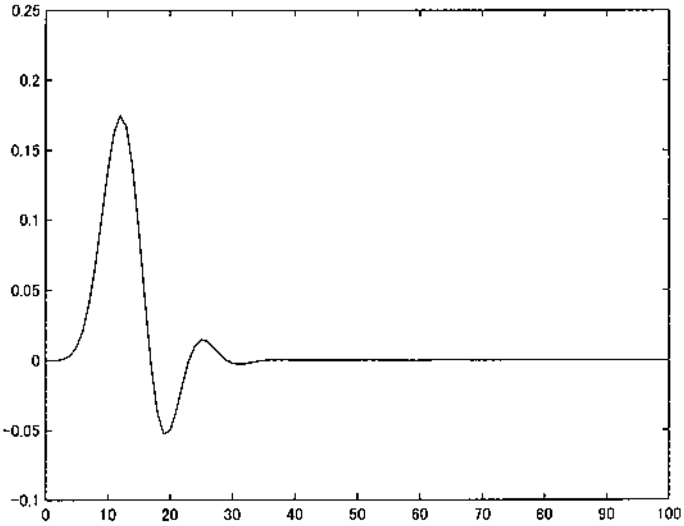

図 2.21　最大平坦 FIR 型最小位相フィルタのインパルス応答

Fig. 2.21　Impulse response of maximally flat FIR minimum-phase filter.

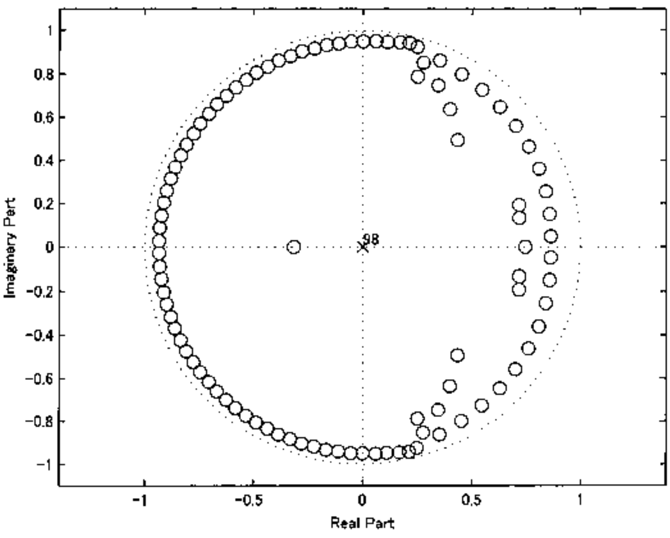

図 2.22　最小位相フィルタの極－零点配置図

Fig. 2.22　Zero/pole diagram of minimum-phase filter.

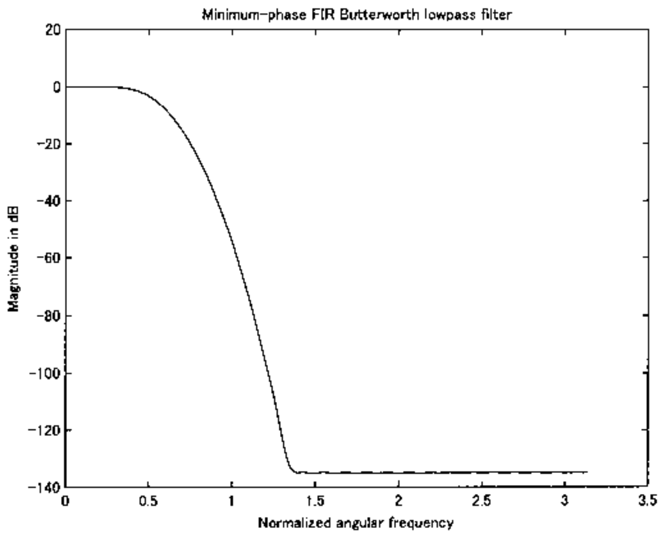

図 2.23　最大平坦 FIR 型最小位相フィルタの振幅特性

Fig. 2.23　Magnitude response of maximally flat FIR minimum-phase filter.

3.　FIR 型 minimum-phase filter

3.1　Minimum-phase characteristics

3.1.1　Minimum-phase signal と filter

はじめに，標本化時間 ΔT で標本化された標本 $h(k\Delta T)$ を考えよう．但し，以下では，一般性を失わない限り，$\Delta T = 1$ として，この標本を $h(k)$ とする．この時 , 離散信号 :

$$h_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\delta(t-k) \tag{3.1}$$

は，$h_\Delta(t)$ とその逆 $\gamma_\Delta(t)$ が両方とも有限のエネルギを有し，かつ，片側信号（one-side signal）であるとき，minimum-phase signal という．片側信号とは，$t<0$ で全て零となる信号である．この片側信号の条件は，因果性を有することの条件に等しいことが判ろう．この minimum-phase signal に関する定義を，数学的に記述すれば，以下のようになる．即ち，$h_\Delta(t)$ は以下の条件を満たすとき，そして，そのときのみ minimum-phase signal となる．

$$\gamma_\Delta(t) * h_\Delta(t) = \delta(t),$$
$$h_\Delta(t) = \gamma_\Delta(t) = 0 \quad \text{for} \quad t<0,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|^2 < \infty \tag{3.2}$$

及び

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma(k)|^2 < \infty$$

但し，* は畳み込み操作を示す．明らかに，minimum-phase signal は，安定で因果性を満足することが判ろう．この minimum-phase signal に関する定義は，時間関数 $h_\Delta(t)$ と $\gamma_\Delta(t)$ で与えられていることに注意しよう．minimum-phase characteristics に関する通常の定義は，$h_\Delta(t)$ の z 変換形 :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \tag{3.3}$$

が単位円内にのみ極と零点を有する時，$H(z)$ は minimum-phase 関数とするものであり，全ての極と零点が単位円外に存在する時，maximum-phase 関数とするものである．しかしながら，この z 変換形を用いた定義では，例えば，零点が単位円上にあるとき，minimum-phase でも maximum-phase でもないことになる．形式的なことかもしれないが，時間関数を用いたここでの定義は，minimum-phase characteristics に関する曖昧さから逃れることが出来る．

以下に，よく知られている minimum-phase signal の重要な性質を 4 点ほど述べておこう（Berkhout, 1973）．

① ある振幅スペクトルに対して，少なくとも一つの minimum-phase signal が存在する．

② $h_\Delta(t)$ が minimum-phase signal の時，$H(z)$ は単位円外に極も零点も持たない．このことは，$H(z)$ が単位円上に極や零点を持つことを否定しない．この様な場合，$h_\Delta(t)$ が有限のエネルギを有し，かつ，$H(z)$ が単位円外に極も零点も持たない場合，$h_\Delta(t)$ は，一般化された minimum-phase signal という言葉で受け入れられる（invertible ではないが，minimum-phase であると言う）．勿論，この時，$\gamma_\Delta(t)$ が有限エネルギを持つことを要求しない．

③ 同じ振幅スペクトルを持つ有限エネルギの片側関数の中で，一般化された minimum-phase signal は，各周波数において最小の位相遅れと群遅延を有する．

④ 同じ振幅スペクトルを持つ有限エネルギの片側関数の中で，（一般化された）最小位相信号のエネルギは $t=0$ に向かって集中する．これは，最小エネルギ遅延特性であり，

$$\sum_{k=m}^{\infty} |h(k)|^2$$

は，$m = 1, 2, ...$ において最小値をとる．この性質は，最小位相信号の持つ性質の中で，最も重要なものであろう．

以下，上記の議論に基づき，安定で因果性を有する filter $H(z)$ の全ての零点が，厳格に，単位円内に存在するとき，invertible な minimum-phase filter と言い，全ての零点が単位円上と単位円内に存在するとき，invertible ではない（一般化された）minimum-phase filter と言う．後述するように，invertible な minimum-phase filter は，因果性を有する cepstrum を持つ．これは，invertible な minimum-phase filter の検証と設計に使われる．maximum-phase filter は，全ての零点が単位円外にある安定で因果性を有する filter であるが，すぐ述べるように，その零点が全て単位円外にあり，単位円内にある極と相反な位置をある全域通過 filter は，maximum-phase filter の特別な例である．これに対し，単位円外にも，単位円内にも零点が存在する安定で因果的な filter を non minimum-phase filter と言う．零点が単位円に対し，相反な位置に対として存在する linear-phase filter は，当然，non minimum-phase filter である．いずれにしても，零点のみから構成される FIR 型の filter では，そのインパルス応答 $\{h(k)\}$ が，そのまま filter の係数となる．

3.1.2　安定で因果性を有する filter の minimum-phase filter と all-pass filter への分解

全ての極が単位円内に存在する安定な filter は，minimum-phase filter $H_{\min}(z)$ と全域通過 filter $H_{ap}(z)$ に分解される．以下，これを示そう．但し，$H_{ap}(z)$ は以下の filter 形式とする .

$$H_{ap}(z) = \frac{s_L + s_{L-1}z^{-1} + \cdots + s_1 z^{-(L-1)} + z^{-L}}{1 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \cdots + s_L z^{-L}} \tag{3.4}$$

ここで，L は $H(z)$ の最小位相零点でない零点の数とする．

まず，$H(z)$ の最小位相零点でない一つの零点 ξ_1 を考えよう．当然，$|\xi_1| > 1$ であり，$H(z)$ は

$$H(z)=H_1(z)(1-\xi_1 z^{-1})$$
$$=H_1(z)(1-\xi_1^{-1}z^{-1})\cdot\frac{(1-\xi_1 z^{-1})}{(1-\xi_1^{-1}z^{-1})}$$
$$\equiv H_2(z)\cdot A_1(z) \tag{3.5}$$

となる．この操作は，minimum-phase 零点でない零点 ξ_1 を minimum-phase 零点とするべく $H_2(z)$ に組み込み，他方で minimum-phase 零点でない ξ_1 と新たな極 $1/\xi_1$ から式 (3.4) の形式の all-pass filter $A_1(z)$ を作り出している．この操作を，$H(z)$ の全ての minimum-phase 零点でない零点（L 個）について行えば，安定な filter $H(z)$ は minimum-phase filter $H_{\min}(z)$ と式 (3.4) の形式の全域通過 filter $H_{ap}(z)$ に分解される．即ち，

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{ap}(z) \tag{3.6a}$$

或いは，正規化円振動数 λ を用いて，

$$H(\lambda)=H_{\min}(\lambda)H_{ap}(\lambda) \tag{3.6b}$$

となる．ここで，

$$\lambda=\omega\Delta T,(|\lambda|\le\pi)$$

とする．この操作は，all-pass filter が maximum-phase filter となることを示しているのが判ろう．

さて，式 (3.6b) の右辺は，各々の filter の利得特性と位相特性を用いて分解すると次式のようになる．

$$H(\lambda)=|H_{\min}(\lambda)|\exp[-i\Theta_{\min}(\lambda)]\cdot|H_{ap}(\lambda)|\exp[-i\Theta_{ap}(\lambda)]$$
$$=|H_{\min}(\lambda)|\exp[-i\{\Theta_{\min}(\lambda)+\Theta_{ap}(\lambda)\}] \tag{3.7}$$

即ち，

$$|H(\lambda)|=|H_{\min}(\lambda)| \tag{3.8}$$

となる．この関係式は，安定で因果的な filter とその filter から得られる minimum-phase filter の利得特性は等しい事を意味している．更に，もし，$H(z)$ が linear-phase filter であれば，式 (3.7) で

$$\Theta_{\min}(\lambda)+\Theta_{ap}(\lambda)=0$$

となるから，式 (3.8) と実質的に等しい

$$H(\lambda)=|H_{\min}(\lambda)|$$

が成り立つ．

そこで，$H_{\min}(z)$ を以下のように cepstrum 展開する（cepstrum に関しては，3.2 で詳述する）．

$$\ln[H_{\min}(\lambda)]=\ln|H_{\min}(\lambda)|-i\Theta_{\min}(\lambda)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos(n\lambda)-i\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(n\lambda) \tag{3.9}$$

この時，式 (3.8) により，

$$\ln[|H_{\min}(\lambda)|]=\ln[|H(\lambda)|=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos(n\lambda) \tag{3.10}$$

となる．故に，式 (3.7) を用いて，$H(z)$ から

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos(n\lambda)$$

を求め，この cepstrum 係数を用いて式 (3.9) により

$$\Theta_{\min}(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(n\lambda) \tag{3.11}$$

を求める事が出来る．即ち，$H(z)$ から $H_{\min}(z)$ が得られる．なお，linear-phase filter の場合には，

$$\Theta_{\min}(\lambda)+\Theta_{ap}(\lambda)=0$$

であるから，式 (3.11) から

$$\Theta_{\min}(\lambda)$$

を，

$$H_{\min}(\lambda)=H(\lambda)\exp[i\Theta_{ap}(\lambda)] \tag{3.12}$$

とすることが出来る．

3.2 Cepstrum technique を用いた FIR 型 minimum-phase filter の設計

Cepstrum を用いて linear-phase filter から minimum-phase filter を設計する方法は，1970 年代当初に，実用的な方法として提案されている (Herrman and Schuessler, 1970)．これは，零点の再配置に基づく方法が，filter の次数が増加すると困難をきたすためである．零点の再配置に基づく方法とは，filter $H(z)$ の単位円外にある全ての零点 ξ_k を相反な $1/\xi_k$ に置換して，$H(z)$ を再構成する方法である．この様にして構成された $H_{\text{minmum-phase}}(z)$ では，全ての零点が単位円内に移動し，

$$|H(z)|=|H_{\text{minmum-phase}}(z)|$$

となることが容易に判ろう．問題は，filter の次数の増加と伴に，零点を推定誤差が増加することである．Cepstrum を用いる方法は，この困難さを克服する一つの方法である．以下, cepstrum の基本的な性質から述べよう．

3.2.1 複素 cepstrum と実 cepstrum の定義

安定な時系列 $\{x(n)\}$ の z 変換を次式とする．

$$X(z)=|X(z)|e^{i\Theta(z)} \tag{3.13}$$

この時，$\{x(n)\}$ の安定性は $X(z)$ の収束域に単位円を含む以下の領域を持つ．

$$r_R<|z|<r_L,0<r_R<1,r_L>1 \tag{3.14}$$

Fourier 変換は，$X(z)$ を単位円上で評価したものであり，$X(e^{i\lambda})$ となる．ここで，λ は正規化円振動数とする．この時，複素 cepstrum は次式で定義される（cepstrum とは，spec-trum を逆に，ceps-trum と読み替えたものである）．

$$\hat{X}(z)\equiv\ln[X(z)] \tag{3.15}$$

したがって，式 (3.13) と式 (3.15) より，

$$\hat{X}(z)=\ln[X(z)]=\ln|X(z)|+i\Theta(z) \tag{3.16}$$

となる．複素 cepstrum は，$\ln[X(z)]$ が以下のような収束列を有するとき，存在するものである．

$$\hat{X}(z) = \ln[X(z)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, |z| = 1 \tag{3.17}$$

即ち，$\hat{X}(z) \equiv \ln[X(z)]$ は安定な数列の z 変換としての全ての性質を有することとなる．当然，z 変換列の収束域は，式 (3.14) で与えられる．従って，式 (3.17) の逆 z 変換が存在し，次式となる．

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \ln[X(z)]z^{n-1}dz \tag{3.18}$$

ここで，周回積分の積分域 C は，式 (3.14) の領域内にあるものとする．また，収束域は単位円を含むから，式 (3.18) に対応する逆 Fourier 変換：

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln[X(e^{i\lambda})]e^{in\lambda}d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|X(e^{i\lambda})\right|e^{in\lambda}d\lambda + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Theta(e^{i\lambda})e^{in\lambda}d\lambda \tag{3.19}$$

が存在する．

これに対して，cepstrum（実 cepstrum）は，式 (3.16) の実部の逆 z 変換，或いは，逆 Fourier 変換で定義される．即ち，

$$\tilde{X}(z) \equiv \ln\left|X(z)\right| \tag{3.20}$$

の逆変換：

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \ln\left|X(z)\right|z^{n-1}dz \tag{3.21}$$

或いは，

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|X(e^{i\lambda})\right|e^{in\lambda}d\lambda \tag{3.22}$$

が cepstrum $\{c_x(n)\}$ となる．式 (3.19) と式 (3.22) より，$\{c_x(n)\}$ が $\hat{X}(e^{i\lambda})$ の実部の逆 Fourier 変換となっているのが判ろう．また，式 (3.19) より，

$$\hat{x}^*(-n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|X(e^{i\lambda})\right|e^{in\lambda}d\lambda - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Theta(e^{i\lambda})e^{in\lambda}d\lambda$$

であるから，式 (3.19) と辺々加えて，

$$\hat{x}(n) + \hat{x}^*(-n) = 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|X(e^{i\lambda})\right|e^{in\lambda}d\lambda = 2c_x(n)$$

となり，次式を得る．

$$c_x(n) = \frac{\hat{x}(n) + \hat{x}^*(-n)}{2} \tag{3.23}$$

この $c_x(n)$ と $\hat{x}(n)$ から判ることは，$x(n)$ の復元が可能なのは複素 cepstrum のみであり，位相項を無視した（実）cepstrum からは復元出来ないと言うことである．最後に，式 (3.19) に注目しよう．いま，

$$[X(e^{i\lambda})]^2$$

の複素 cepstrum を求めると，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln[X(e^{i\lambda})]^2 e^{in\lambda}d\lambda$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln[X(e^{i\lambda})]e^{in\lambda}d\lambda$$
$$= 2\hat{x}(n) \tag{3.24}$$

となることが判る．即ち，$[X(e^{i\lambda})]^2$ の複素 cepstrum は，$X(e^{i\lambda})$ の複素 cepstrum の 2 倍となる．この性質は，filter の設計時に用いられる．

3.2.2　Cepstrum に関する他の表現

ここまで，cepstrum は $\hat{X}(z) = \ln[X(z)]$ の z に関するパワー展開の係数列として定義してきた．また，cepstrum の積分表現として，式 (3.21) 及び (3.22) が，各々，$\tilde{X}(z)$ 及び $\tilde{X}(e^{i\lambda})$ について与えられた．ここでは，これらの式に現れる対数計算を不要とする cepstrum の微分形について述べよう．まず，関数 $\ln|X(z)|$ が解析的（無限回微分可能）としよう．その時，

$$\frac{d\tilde{X}(z)}{dz} = \frac{dX(z)/dz}{X(z)}, i.e., \tilde{X}'(z) = \frac{X'(z)}{X(z)} \tag{3.25}$$

が成立する．ここで，z 変換の性質，$z\tilde{X}'(z)$ が $-nc_x(n)$ の z 変換であることを思いだそう（注：$\tilde{X}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x(k)z^{-k}$ であるから，

$$\tilde{X}'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-k)c_x(k)z^{-k-1} = z^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-k)c_x(k)z^{-k}$$

となり，

$$z\tilde{X}'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-k)c_x(k)z^{-k}$$

となる）．従って，

$$-nc_x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z\tilde{X}'(z)z^{n-1}dz \tag{3.26}$$

となる．ここで，(3.25) 式を用いれば，式 (3.26) は以下のようになる．

$$-nc_x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zX'(z)}{X(z)}z^{n-1}dz \tag{3.27}$$

C は $\tilde{X}(z)$ の収束域（単位円を含む）での周回路である．故に，$c_x(n)$ は次式で与えられる．

$$c_x(n) = -\frac{1}{2\pi ni}\oint_C \frac{zX'(z)}{X(z)}z^{n-1}dz, n \neq 0 \tag{3.28}$$

$n = 0$ の場合は，式 (3.22) より，次式となる．

$$c_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(e^{i\lambda})d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|X(e^{i\lambda})\right|d\lambda \tag{3.29}$$

式 (3.28) と (3.29) は，$x(n)$ と $c_x(n)$ を結びつけるもう一つの表現であり，特に，式 (3.28) は対数演算が必要とされないことに気が付こう．

さて，再び，式 (3.25) に戻ろう．式 (3.25) は，z を辺々に乗じて整理することにより次式となる．

$$zX'(z) = z\tilde{X}'(z) \cdot X(z) \tag{3.30}$$

故に，

$$nx(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kc_x(k)x(n-k) \tag{3.31}$$

となり，整理すると，

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right) c_x(k)x(n-k) \tag{3.32}$$

なる非線形方程式が得られる．この式 (3.32) は，cepstrum 係数から filter のインパルス応答，即ち，FIR filter の場合，filter 係数を求めるのに用いられる．

3.2.3 Cepstrum の微分形

Cepstrum の微分形（differential cepstrum）を考えよう．これは，対数演算なしで cepstrum を計算する便法である．まず，微分 cepstrum の定義を以下とする．

$$\tilde{x}_d(n) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{X'(z)}{X(z)} z^{n-1} dz \tag{3.33}$$

また，式 (3.25) を考えるならば，これは単位円上で以下のように評価される．

$$\tilde{X}'(e^{i\lambda}) = \frac{X'(e^{i\lambda})}{X(e^{i\lambda})} \tag{3.34}$$

ここで，プライムは，λ に関する微分とする．更に，$x(n)$ の Fourier 変換：

$$X(e^{i\lambda}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-in\lambda}, \tag{3.35}$$

を考えると，その λ に関する微分は以下となる．

$$X'(e^{i\lambda}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-inx(n))e^{-in\lambda}. \tag{3.36}$$

即ち，$X'(e^{i\lambda})$ は $-inx(n)$ の Fourier 変換となる．同様に，$\tilde{X}'(e^{i\lambda})$ は $-inc_x(n)$ の Fourier 変換となる．従って，$n \neq 0$ で

$$-nc_x(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}'(e^{i\lambda})e^{in\lambda}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{X'(e^{i\lambda})}{X(e^{i\lambda})}e^{in\lambda}d\lambda,$$

即ち，

$$c_x(n) = -\frac{1}{2\pi ni}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{X'(e^{i\lambda})}{X(e^{i\lambda})}e^{in\lambda}d\lambda \tag{3.37}$$

となる．また，$n = 0$ の時，$c_x(0)$ は次式

$$c_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|X(e^{i\lambda})\right| d\lambda$$

となる．ところで，式 (3.27) と式 (3,33) より，

$$-nc_x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zX'(z)}{X(z)} z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{X'(z)}{X(z)} z^{(n+1)-1}dz = \tilde{x}_d(n+1)$$

即ち，

$$c_x(n) = -\frac{\tilde{x}_d(n+1)}{n} \tag{3.38}$$

が成り立つ．故に，

$$\tilde{x}_d(n+1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{X'(e^{i\lambda})}{X(e^{i\lambda})}e^{in\lambda}d\lambda \tag{3.39}$$

となる．この式 (3.35)，(3.36)，(3.38)，及び，(3.39) は，$x(n)$ と $nx(n)$ の Fourier 変換の項から微分 cepstrum を経由して実 cepstrum が計算されることを意味している．また，式 (3.38) は，$x(n)$ が minimum-phase sequence の時，$c_x(n) = 0\ (n < 0)$ より $\tilde{x}_d(n) = 0\ (n < 1)$ となることを意味している．式 (3.35)，(3.36)，(3.38)，及び，(3.39) を実際の計算形で示すと，

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp\left(\frac{-i2\pi kn}{N}\right) = X(e^{i\lambda})\Big|_{\lambda=(\frac{2\pi}{N})k}$$

$$X'(k) = -i\sum_{n=0}^{N-1} nx(n) \cdot \exp\left(\frac{-i2\pi kn}{N}\right) = X'(e^{i\lambda})\Big|_{\lambda=(\frac{2\pi}{N})k}$$

$$c_x(k) = -\frac{\tilde{x}_d(k+1)}{k} = -\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{X'(n)}{X(n)}\cdot\exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right), 1 \le k \le N-1$$

$$c_x(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\ln\left|X(n)\right| \tag{3.40}$$

となる．

3.2.4 Cepstrum の極と零点

複素 cepstrum は，

$$\hat{x}(n) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln[X(e^{i\lambda})]e^{in\lambda}d\lambda$$

で定義され，$X(e^{i\lambda})$ は $x(n)$ の Fourier 変換：

$$X(e^{i\lambda}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-in\lambda}$$

で定義されていることは, 既に述べた通りである．そこで，$X(z)$ として，極－零点表現：

$$X(z) = K\frac{(1-q_1z^{-1})(1-q_2z^{-1})\cdots(1-q_Mz^{-1})}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})\cdots(1-p_Nz^{-1})} \tag{3.41}$$

を採用すれば，$\ln[X(z)]$ は次式のように展開される．

$$\ln[X(z)] = \ln K + \sum_{m=1}^{M}\ln(1-q_mz^{-1}) - \sum_{n=1}^{N}\ln(1-p_nz^{-1})$$

$$= \ln K - \sum_{m=1}^{M}\ln\left(\frac{1}{1-q_mz^{-1}}\right) + \sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{1}{1-p_nz^{-1}}\right) \tag{3.42}$$

ここで，q_m を第 m 番目の零点，p_n を第 n 番目の極とし，これらは全て単位円内に存在するとする．故に，式 (3.42) に Maclaurin 展開：

$$\ln\left(\frac{1}{1-\zeta}\right) = \zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3} + \cdots + \frac{\zeta^k}{k} + \cdots, |\zeta| < 1$$

を適用すると，

$$\ln\left(\frac{1}{1-q_k z^{-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_k^n}{n}z^{-n},|z|>|q_k|$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-p_k z^{-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_k^n}{n}z^{-n},|z|>|p_k| \tag{3.43}$$

となる．z 変換の収束域が単位円を含むため，Maclaurin 展開は単位円内に存在する式 (3.41) の零点と極に対して，式 (3.43) の様な z 変換形を与えることが判ろう．実際的な問題として，例えば FIR linear-phase filter の様に，もし，零点の中で単位円の外にあるものがあれば (non-minimum-phase な零点)，式 (3.42) の対応する項を，以下のように Maclaurin 展開する．

$$\ln\left(\frac{1}{1-q_k z^{-1}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{q_k^{-1}z}{q_k^{-1}z-1}\right)=\ln\left(\frac{-z}{q_k}\right)+\ln\left(\frac{1}{1-q_k^{-1}z}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{-z}{q_k}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_k^{-n}}{n}z^{n},|z|>|q_k^{-1}| \tag{3.44}$$

ここで，式 (3.44) の右辺第1項を式 (3.42) の第1項に繰り込んで考えれば，式 (3.44) は右辺第2項の z 変換形となる．式 (3.43) は，$\hat{x}(n)$ の minimum-phase 部分が

$$-\frac{q_k^n}{n}+\frac{p_k^n}{n}$$

となり，式 (3.44) は

$$\hat{x}(-n)=\frac{q_k^{-n}}{n}$$

として単位円外にある零点が non-minimum-phase 部分に寄与していることを示している．そこで，non-minimum-phase 部分に含まれる n を $-n$ に置換すれば，これは単位円内にある零点から得られる minimum-phase 部分と一致する．即ち，単位円外にある零点を単位円内の相反位置へ動かす為には，複素 cepstrum の負の部分 ($-n$) を正の値 (n) にすれば良いこととなる．これは，linear-phase filter を minimum-phase filter $H_{\min}(z)$ から $[H_{\min}(z)]^2$ の形で構成したとき，linear-phase filter から得られる cepstrum $\{c_{lh}(n)\}$ から $H_{\min}(z)$ の cepstrum $\{c_{mh}(n)\}$ が

$$c_{mh}(n)=\frac{1}{2}[c_{lh}(n)+c_{lh}(-n)],(n>1)$$

で得られることを示している．分母の2は式 (3.24) による．更に，$H_{\min}(z)$ の filter 係数は，式 (3.32) から求めることが出来る．

3.2.5　例

数式ばかりでは，いささか疲れるので，簡単な例を示そう．以下に示す Matlab 上のプログラムは，最初に乱数を用いて次数 $N=7$ の FIR filter を作ることから始めている．この例では，最初の sample filter は minimum-phase filter とはならない．これは，極－零点配置から見ることが出来る．また，この filter は因果性を満たしていない．これは，cepstrum 係数が $n<0$ においても零とならないことで判る．

```
% Sample_program01.m

clear all

% Sample filter of order N
N=7;            % Filter order
h=rand(1,N);    % Filter coefficients
w=[0:1:N-1];

plot(w,h)
title('Impulse response of sample filter')
figure

% Pole/zero diagram
zplane(h,1)
title('Pole/zero diagram of of sample filter')
figure

% Causlaity check
cx=causality_check(h,1024);
figure

% Frequency response
gain_plot(h,512,'sample filter')
figure

% Zero finding method
hb=zero_finding(h,N);

plot(w,hb)
title('Impulse response of minimum-phase filter obtained by
zero finding method')
figure

% Pole/zero diagram
zplane(hb,1);
title('Pole/zero diagram of minimum-phase filter obtained by
zero finding method')
figure

% Causality check
cx=causality_check(hb,1024);
figure
```

```
    % Frequency response
    gain_plot(hb,512,'FIR minimum-phase filter estimated by
zero-finding method')
    figure

    % Cepastrum method
    hm=cepstrum_method(h,1024);
    hmm([1:N])=hm([1:N]);  % Final filter coefficients

    plot(w,hmm)
    title('Impulse response of minimum-phase filter obtained by
Cepstrum method')
    figure

    % Pole/zero diagram
    zplane(hmm,1);
    title('Pole/zero diagram of minimum-phase filter obtained by
Cepstrum method')
    figure

    % Causality check
    cx=causality_check(hmm,1024);
    figure

    % Frequency response
    gain_plot(hmm,512,'FIR minimum-phase filter obtained by
Cepstrum method')
    figure

    % Hilbert transform methods
    a=mps180(fft(h,1024));   % Frequency response
    h3=real(ifft(a));        % Filter coefficents
    hil([1:N])=h3([1:N]);

    plot(w,hil)
    title('Impulse response of minimum-phase filter obtained by
Hilbert transform method')
    figure

    % Pole/zero diagram
    zplane(hil,1)
    title('Pole/zero diagram of minimum-phase filter obtained by
Hilbert transform method')
    figure

    % Causality check
    cx=causality_check(hil,1024);
    figure

    % Frewuency response
    gain_plot(hil,512,'FIR minimum-phase filter obtained by
Hilbert transform method')

    % End of program
```

図 3.1 は，sample filter のインパルス応答を示すものである．この filter が minimum-phase filter とならないことは，**図 3.2** の極－零点配置から判ろう．

次に，**図 3.1** のインパルス応答から，複素 cepstrum を計算し，因果性を調べる．因果性は，cepstrum 係数が負の軸上で零となることが条件となる．以下に cepstrum を用いる因果性検証プログラムを示す．

```
% causality_check.m

function cx=causality_check(h,M)
% M >> length(h)
cz=fft(h,M);
m=abs(cz); pm=unwrap(angle(cz));
HW=m.*exp(j*pm);

% Generation of complex cepstrum
c=ifft(log(HW));
c=real(c);

% Rearrangement of complex cepstrum
c_arrange=[c(M/2+2:1:M) c(1:1:M/2+1)];
cx=[-M/2+1:1:M/2];

% Plotting of cepstrum
plot(cx,c_arrange)
xlabel('n'); ylabel('Cepstrum coefficients');
title('Cepstrum check for causality')

% End of program
```

図 3.3 は，sample filter が因果性を満たさないことを示すものである．この sample filter の利得特性は，次のプログラムで与えられる．結果が，**図 3.4** である．

```
% gain_plot.m

function gain_plot(h,M,TitleA)
[a1,w1]=freqz(h,1,M);
w1=w1/pi;
plot(w1,20*log10(abs(a1)));
title(TitleA);
xlabel('Frequency normalized by Nyquist freq.');
ylabel('Magnitude in dB');

% End of program
```

さて，因果性を満たさない non-minimum-phase filter から，同じ利得特性を有する minimum-phase filter がどのように

構成されるかを示そう．最初の例は，零点の再配置に基づく方法であり，この例のように次数 N が小さい場合に有効である．零点の再配置による方法を以下の function で示そう．

```
% zero_finding.m

function hz=zero_finding(h,N)
% Zero finding method
z=roots(h);  % Root-finding

for k=1:N-1
    if abs(z(k))>1
       z(k)=1/conj(z(k));
     else
       z(k)=z(k);
    end
end

% Reconstruction of filter coefficients
hz=poly(z);

% End of program
```

図 3.5 が零点の再配置法により得られる filter のインパルス応答である．この新しい filter は，**図 3.6** に示すように，全ての零点と極が単位円内にあり，minimum-phase filter の条件を満たしているとともに，**図 3.7** が示すように，cepstrum 係数例の因果性が満たされており，filter の因果性が検証できる．**図 3.8** は，この filter の利得特性であるが，sample filter の利得特性を保持していることが判ろう．

次に，cepstrum を用いた minimum-phase filter の構成結果を示そう．当然の事ながら，結果は，零点の再配置による方法と一致する．即ち，零点の再配置による結果である**図 3.5** ～**図 3.8** は，cepstrum を用いた結果である**図 3.9** ～**図 3.12** と，各々，一致する．以下に，cepstrum を用いた minimum-phase filter の設計プログラムを示そう．

```
% cepstrum_method.m

function hcep=cepstrum_method(h,M)
% M >> length(h)
cz=fft(h,M);
m=abs(cz); pm=unwrap(angle(cz));
HW=m.*exp(j*pm);

% Cepstrum coefficients
c=ifft(log(abs(HW)));

% Reconstruction of minimum-phase cepstrum coefficients
cp=[c(1) 2*c(2:M/2) c(M/2+1)];

% Frequency response function
Hm=exp(fft(cp,M));

% Reconstruction of filter coefficients
hcep=real(ifft(Hm));

% End of program
```

sample_program01 では，おまけとして，後述する Hilbert 変換を用いる方法も示しているが，結果は零点の次配置による方法や cepstrum を用いる方法と一致する．確認されたい．

3.3　Discrete Hilbert transform を用いた FIR 型 minimum-phase filter の設計

3.3.1　Discrete Hilbert transform

任意の実数列 $\{x(n)\}$ は，共役対称部と非対称部の和として，以下のように表現される．

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \tag{3.45}$$

ここで，

$$x_e(n) = \{x(n) + x(-n)\}/2$$

及び

$$x_o(n) = \{x(n) - x(-n)\}/2$$

を定義する．この二つの定義式の辺々を加えれば，式 (3.45) が成り立つことが判ろう．さて，この実数列が安定で，因果性を満たすとすると $(x(n) = 0\,, n < 0)$，上記定義式より，

$$x(n) = 2x_e(n)u(n) - x_e(0)\delta(n)\,,\ n \ge 0 \tag{3.46a}$$

及び

$$x(n) = 2x_o(n)u(n)\,,\ n > 0 \tag{3.46b}$$

となることが簡単に導かれよう．これらの式は，$x(n)$ は，$x_e(n)$ を用いて求める（recover）ことが出来るが，$x_o(n)$ からは求められないことを意味している．これは，$n = 0$ で $x_o(0) = 0$ となってしまう為である．しかしながら，いずれにしても，$n \ge 1$ で $x_e(n) = x_o(n)$ となる．これらのことは，因果性を満たすと言うことが，$x_e(n)$ と $x_o(n)$ の間にかなり強い拘束条件を持たせることを示している．

さて，$\{x(n)\}$ の Fourier 表示：

$$X(e^{i\lambda}) = X_R(e^{i\lambda}) + iX_I(e^{i\lambda}) \tag{3.47}$$

は，実数列に対して，

$$X(e^{i\lambda}) = \sum_n x(n)e^{in\lambda} = \sum_n x_e(n)e^{in\lambda} + \sum_n x_o(n)e^{in\lambda}$$

と書き下せる．ここで，

$$\sum_n x_e(n)e^{n\lambda}$$
$$= x_e(0) + \sum_{n\ge 1}\{x_e(n)[\cos n\lambda + i\sin n\lambda] + x_e(-n)[\cos n\lambda - i\sin(n\lambda)\}$$

$$= x_e(0) + 2\sum_{n\ge 1} x_e(n)\cos n\lambda$$

及び

$$\sum_n x_o(n) e^{in\lambda}$$
$$= \sum_{n>0}\{x_o(n)[\cos n\lambda + i\sin(n\lambda)] - x_o(n)[\cos n\lambda - i\sin n\lambda]\}$$
$$= i\cdot 2\sum_{n>0} x_o(n)\sin n\lambda$$

となるため，$X_R(e^{i\lambda})$ と $X_I(e^{i\lambda})$ は，各々，$x_e(n)$ と $x_o(n)$ の Fourier 変換となる．そこで，式 (3.46a) を用いて $X(e^{i\lambda})$ を計算すると，

$$X(e^{i\lambda}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2X_R(e^{i\lambda})U(e^{i(\lambda-\xi)})d\xi - x(0) \tag{3.48}$$

となる．ここで，$U(e^{i\lambda})$ は単位ステップ関数 $u(n)$ の Fourier 変換とする．即ち，

$$U(e^{i\lambda}) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\cot(\lambda/2) + \pi\delta(\lambda) \tag{3.49}$$

である（この証明は，以下の通りである．まず $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$ であるから，その Fourier 変換は，$1 = U(e^{i\lambda})[1 - e^{-i\lambda}]$ となる．しかるに，$\lambda = 0$ で，$[1 - e^{-i\lambda}] = 0$ となるから，$U(e^{i\lambda})$ は $|\lambda| \le \pi$ で

$$U(e^{i\lambda}) = \frac{1}{1-e^{-i\lambda}} + const\cdot\delta(\lambda)$$

とならねばならない．ここで，$U(e^{i\lambda})$ の直流成分 (1/2) は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(e^{i\lambda})d\lambda = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} const\cdot\delta(\lambda)d\lambda = \frac{const}{2\pi}$$

となるから，$const = \pi$ となる．従って，

$$U(e^{i\lambda}) = \frac{1}{1-e^{-i\lambda}} + \pi\delta(\lambda) = \frac{e^{i\lambda/2}}{e^{i\lambda/2} - e^{-i\lambda/2}} + \pi\delta(\lambda)$$
$$= \frac{\cos(\lambda/2) + i\sin(\lambda/2)}{2i\sin(\lambda/2)} + \pi\delta(\lambda) = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\cot(\lambda/2) + \pi\delta(\lambda)$$

となる）．よって，式 (3.47) は以下の様に展開される．

$$X(e^{i\lambda}) = X_R(e^{i\lambda}) + iX_I(e^{i\lambda})$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{i\xi})d\xi - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{i\xi})\cot(\xi/2)d\xi$$
$$+ X_R(e^{i\lambda}) - x(0) \tag{3.50}$$

$x(0)(= x_e(0))$ を複素数として Fourier 表示すると，

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{i\xi})d\xi + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{i\xi})d\xi \tag{3.51}$$

となるから，式 (3.50) の虚数部は以下のように展開される．

$$X_I(e^{i\lambda}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{i\xi})\cot(\frac{\lambda-\xi}{2})d\xi - \mathrm{Im}[x(0)] \tag{3.52}$$

いまの場合，$x(0)(= x_e(0))$ は実数であるから，式 (3.52) の右辺第 2 項は零となる．そこで，実数列 $\{x(n)\}$ に対する表現である式 (3.52) に対して，複素 cepstrum 列 $\hat{x}(n)$ を適用すると，

$$X_R(e^{i\lambda}) = \ln\left|X(e^{i\lambda})\right|, X_I(e^{i\lambda}) = \arg X(e^{i\lambda}) \equiv \Theta(e^{i\lambda})$$

であるから，以下の関係式を得る．

$$\arg X(e^{i\lambda}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|X(e^{i\xi})\right|\cot(\frac{\lambda-\xi}{2})d\xi - \mathrm{Im}[\hat{x}(0)] \tag{3.53}$$

当然のことながら（複素 cepstrum は実数列であるから），式 (3.53) の右辺第二項は零となる．さて，式 (3.53) の意味を考えよう．これは，複素 cepstrum 列 $\hat{x}(n)$ が振幅特性 $\ln|X(e^{i\lambda})|$ を有し，これが minimum-phase sequence とすると，その位相特性は対数振幅特性の Hilbert 変換式 (3.53) により一意的に決定される，と言うことを意味している．従って，この様に決められた振幅特性と位相特性は minimum-phase filter を構成する．即ち，minimum-phase filter の係数は，$\left|X(e^{i\lambda})\right|\exp[i\Theta(e^{i\lambda})]$ の逆 Fourier 変換で与えられる (Damera-Venkata *et al*., 2000)．

3.3.2 例

簡単な例を示そう．これは，以下の demo_program.m で示される．このプログラムでは，最初に，(4. で後述する）Parks-McCellan の方法 (Proakis,1996) を用いて，FIR 型の linear-phase filter を構築する．**図 3.13** に filter のインパルス応答 (filter の係数）を示す．次に，次数が大きいため少し時間がかかるが，zplane を用いて，この filter の極－零点配置を求める．結果として，**図 3.14** に示すように，単位円に対して 4 つの相反関係にある零点の組を明瞭に見いだすことが出来よう．即ち，この様な零点配置が linear-phase filter を特徴づけている．**図 3.15** は，この filter の振幅特性である．

```
% demo_program.m

% Construction of linear-phase filter by Marks-McClellan
% method
f=[0 (.01*2) (.02*2) 1];
a=[1 1 0 0];
b=remez(500,f,a,[1 5e6]);

% Plotting of impulse response
plot(b)
figure

% Pole/zero diagram of linear-phase filter
zplane(b)
figure

% Transfer function of linear-phase filter
```

```
[h,w]=freqz(b,1,1024);
plot(w,20*log10(abs(h)));
title('FIR linear phase lowpass filter');
xlabel('Normalized anfular frequency');
ylabel('Magnitude in dB');
figure

% Construction of minimum-phase filter
N=2^19;
H=fft(b,N);
w1=linspace(0,2*pi,N);
H1=real(H.*exp(j*w1*250));

d1=max(H1)-1;
d2=0-min(H1);
s=4/(sqrt(1+d1+d2)+sqrt(1-d1+d2))^2;
H2=H1+d2;
clear H1;

H3=H2*s;
HR=sqrt(H3)+1e-10;  % epsiron=1e-10
clear H3;

% Discrete Hilbert transform
y=dhtm(HR',N,251);
clear HR;

% Impulse response of minimum-phase filter
y1=real(y);

% Pole/zero diagram of minimum-phase filter
zplane(y1)
figure

% Transfer function of minimum-phase filter
[h2,w]=freqz(y1,1,32768);
plot(w,20*log10(abs(h2)));
title('FIR minimum phase lowpass filter');
xlabel('Normalized angular frequency');
ylabel('Magnitude in dB');
figure

% Plotting of impulse response of minimum-phase filter
plot(y1);
title('Impulse response of minimum phase filter');
figure

% Plotting of group delay characteristics
grpdelay(b);
title('Group delay of linear-phase filter');
figure
grpdelay(y);
title('Group delay of minimum-phase filter');

% Error analysis
d1d=sqrt((1+d1+d2)*s)-1;
d2d=sqrt(2*d2*s);
d1r=max(abs(h2))-1;
d2r=max(abs(h2(30000:32768)));
err1=(abs(d1d-d1r)/d1d)*100;
err2=(abs(d2d-d2r)/d2d)*100;

% End of program
```

次に，プログラムでは，linear-phase filter から minimum-phase filter への変換を行っている．最初に，filter の正規化操作を行った後，Hilbert 変換を用いて minimum-phase filter の係数を求めている．Hilbert 変換は，以下の function を用いて行われる．

```
% dhtm.m

function y=dhtm(mag,N,s)

sig(1:(N/2))=sign(linspace(1,(N/2),(N/2)));
sig((N/2)+1)=0;
sig((N/2)+2:N)=sign(linspace(-1,-(N/2)-1,(N/2)-1));
sig(1)=0;

logmag=log(abs(mag));
in=ifft(logmag);
ph=-j*fft(sig'.*in);
rec=mag.*exp(j*ph);
recu=ifft(rec);
y=recu(1:s);

% End of program
```

得られた FIR 型 minimum-phase filter の極－零点配置が，zplane を用いて，**図 3.16** の様に求まる．単位円内の実軸上にのみ零点が存在する minimum-phase filter となっていることが判ろう．次に，**図 3.17** の振幅特性と**図 3.18** のインパルス応答が求まる．プログラムでは，最後に，群遅延特性を求めている．linear-phase filter と minimum-phase filter の群遅延特性は，各々，**図 3.19** 及び**図 3.20** となる．

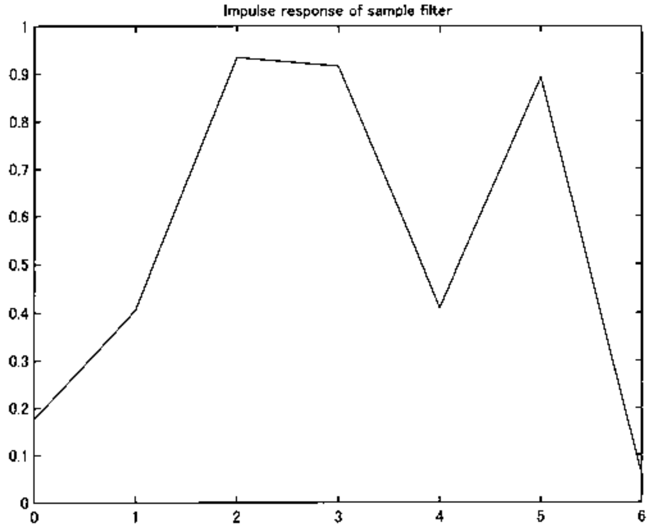

図 3.1　サンプルフィルタのインパルス応答

Fig. 3.1　Impulse response of sample filter.

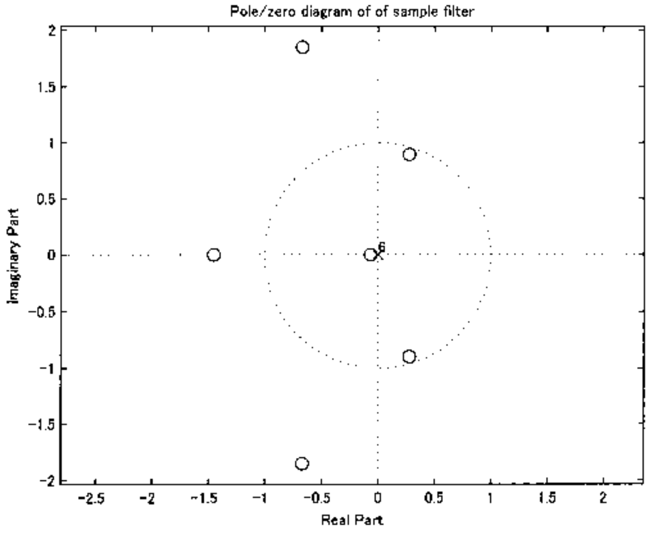

図 3.2　サンプルフィルタの極－零点配置図

Fig. 3.2　Pole/zero diagram of sample filter.

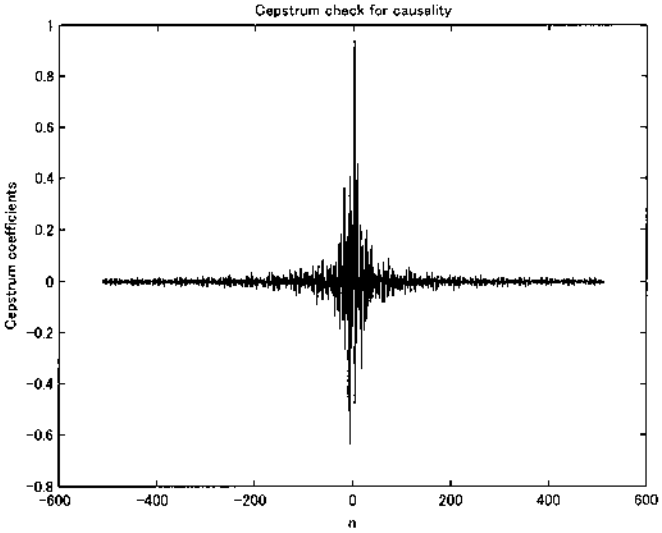

図 3.3　**図 3.1** で示したインパルス応答のケプストラム

Fig. 3.3　Cepstrum of impulse response shown in **Fig.3.1**.

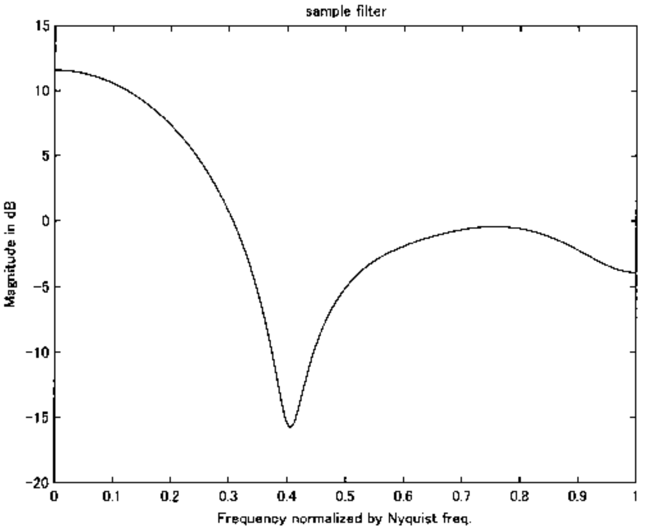

図 3.4　**図 3.1** のインパルス応答を有するサンプルフィルタの振幅特性

Fig. 3.4　Magnitude response of sample filter.

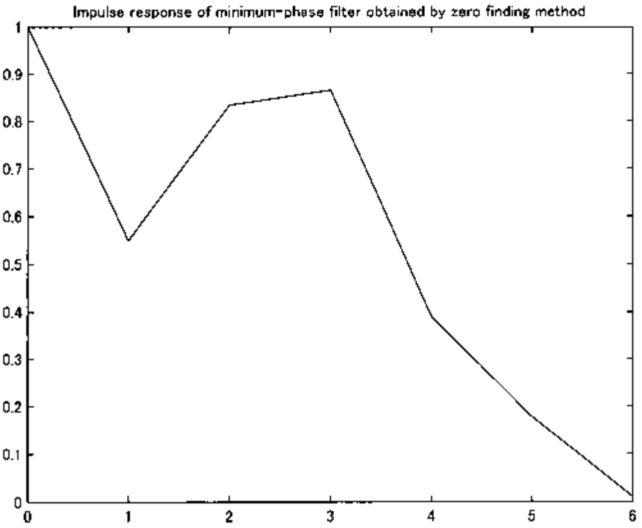

図 3.5　零点再配置法により求められた最小位相フィルタのインパルス応答

Fig. 3.5　Impulse response of minimum-phase filter.

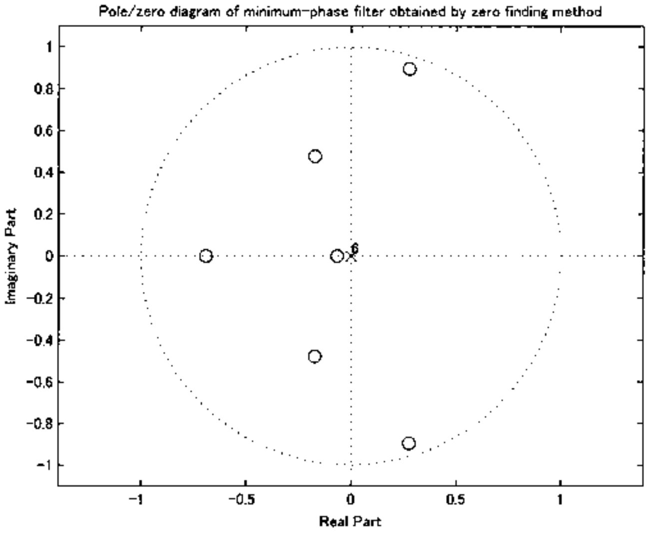

図 3.6　最小位相フィルタの極－零点配置図

Fig. 3.6　Pole/zero diagram of minimum-phase filter.

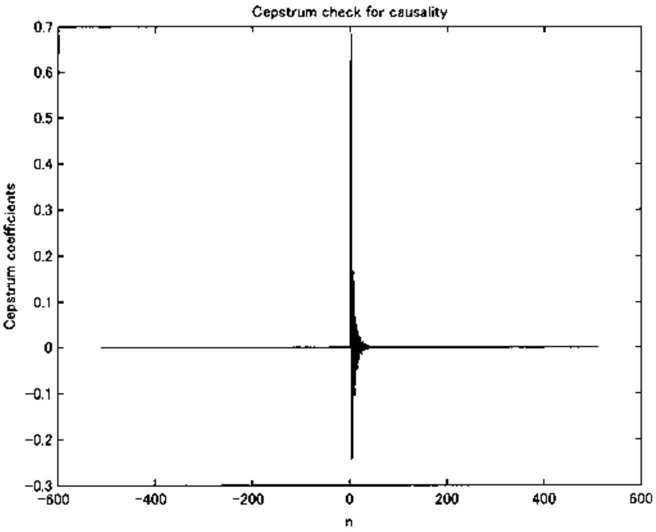

図 3.7　**図 3.5** で示されたインパルス応答のケプストラム

Fig. 3.7　Cepstrum of impulse response shown in **Fig.3.5**.

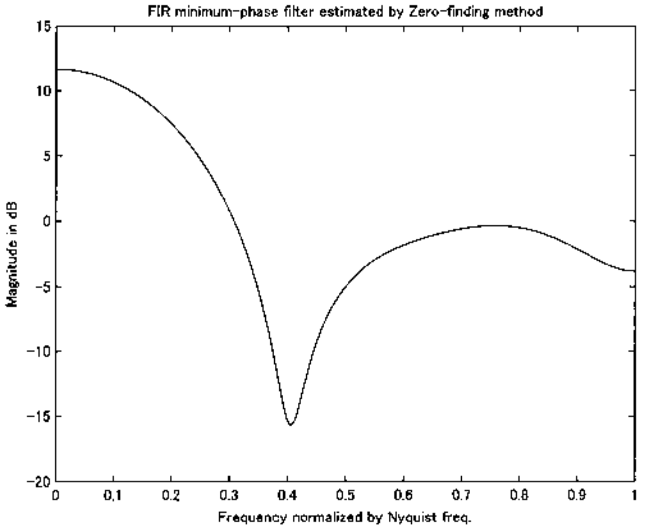

図 3.8　**図 3.5** のインパルス応答を有する最小位相フィルタの振幅特性

Fig. 3.8　Magnitude response of minimum-phase filter.

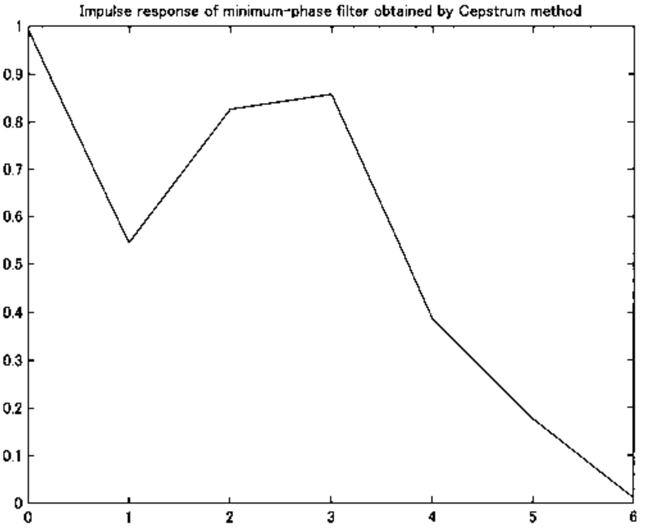

図 3.9　ケプストラム法により求められた最小位相フィルタのインパルス応答

Fig. 3.9　Impulse response of minimum-phase filter.

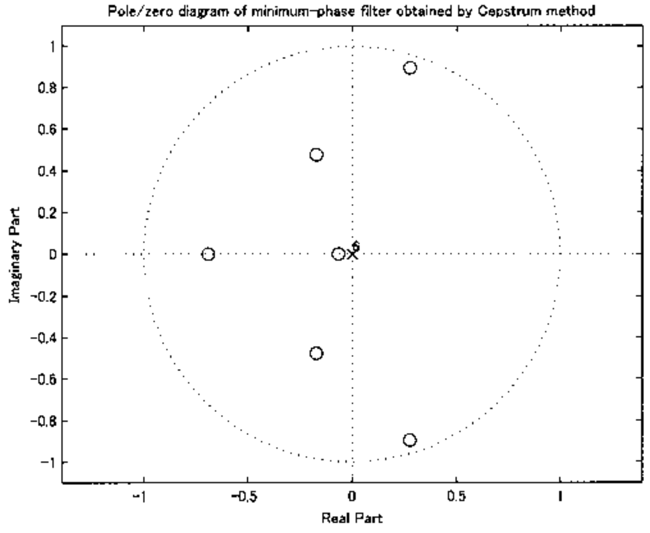

図 3.10　最小位相フィルタの極－零点配置図
Fig. 3.10　Pole/zero diagram of minimum-phase filter.

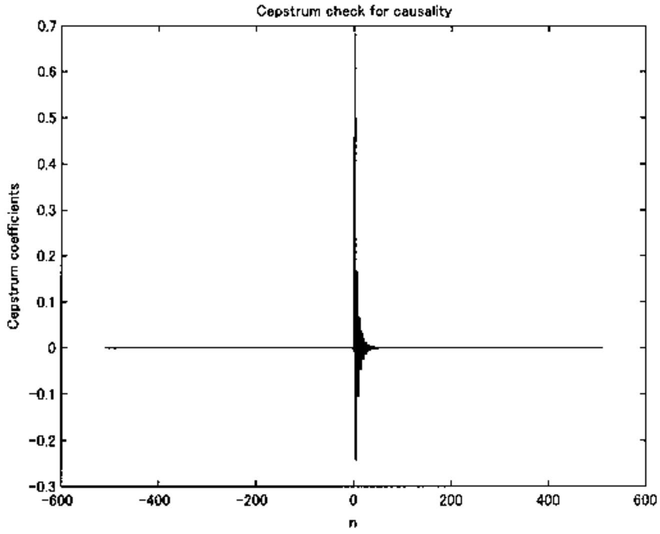

図 3.11　**図 3.9** に示されたインパルス応答のケプストラム
Fig. 3.11　Cepstrum of impulse response shown in **Fig.3.9**.

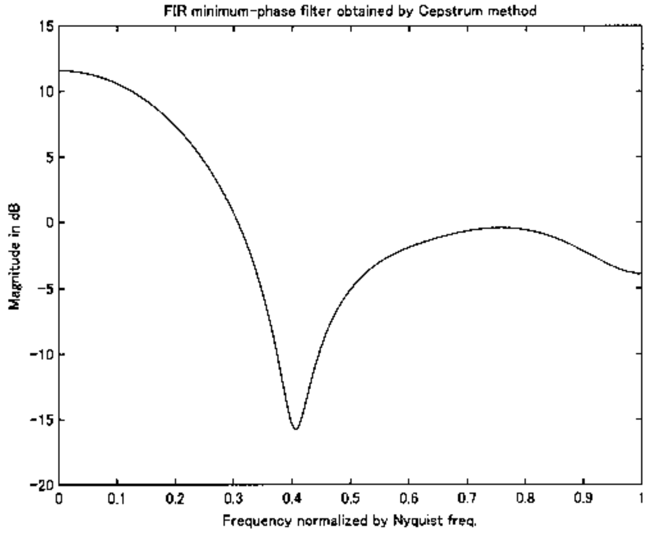

図 3.12　**図 3.9** のインパルス応答を有する最小位相フィルタの振幅特性
Fig. 3.12　Magnitude response of minimum-phase filter.

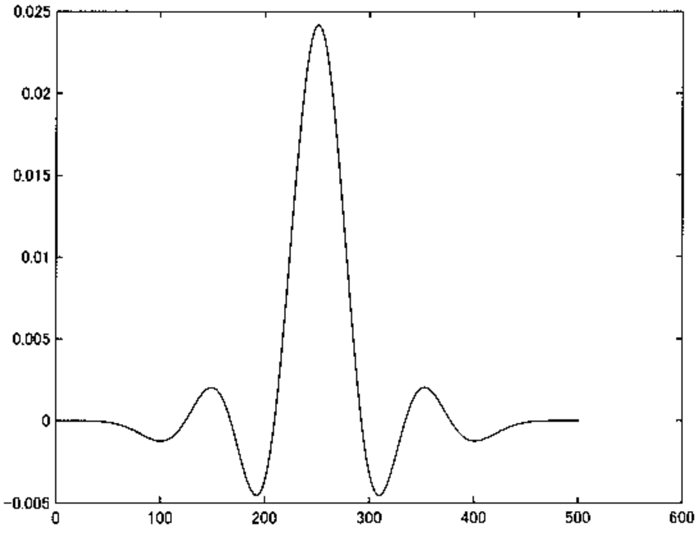

図 3.13　FIR 線形位相型低域通過フィルタのインパルス応答
Fig. 3.13　Impulse response of FIR linear-phase filter.

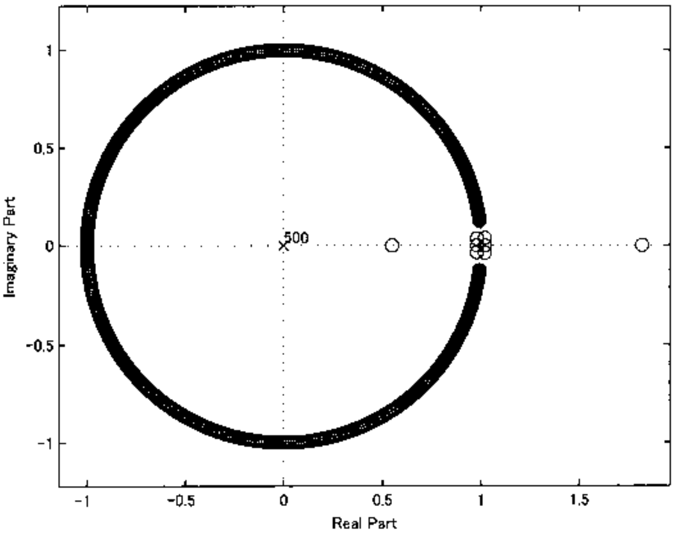

図 3.14　線形位相フィルタの極－零点配置図
Fig. 3.14　Pole/zero diagram of linear-phase filter.

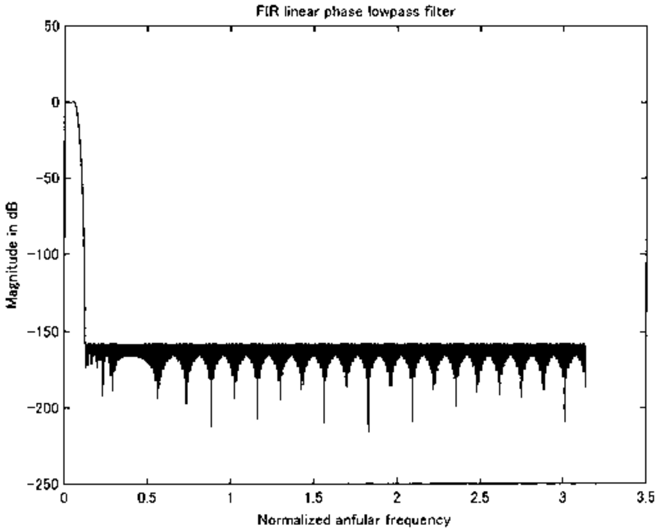

図 3.15　線形位相フィルタの振幅特性
Fig. 3.15　Magnitude response of linear-phase filter.

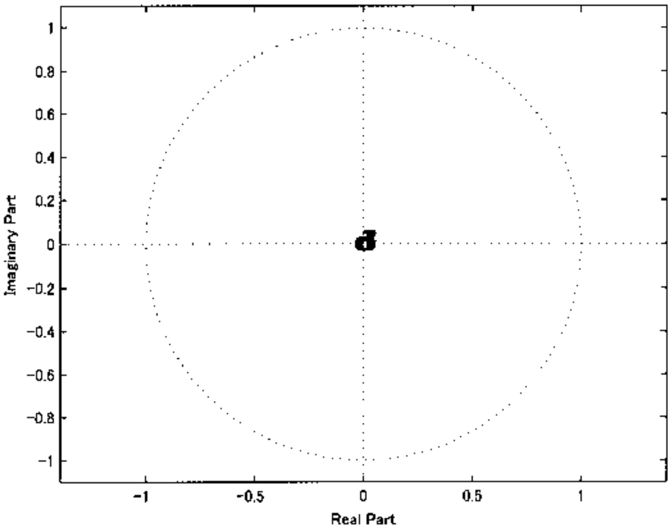

図 3.16　最小位相フィルタの極 - 零点配置図
Fig. 3.16　Pole/zero diagram of minimum-phase filter.

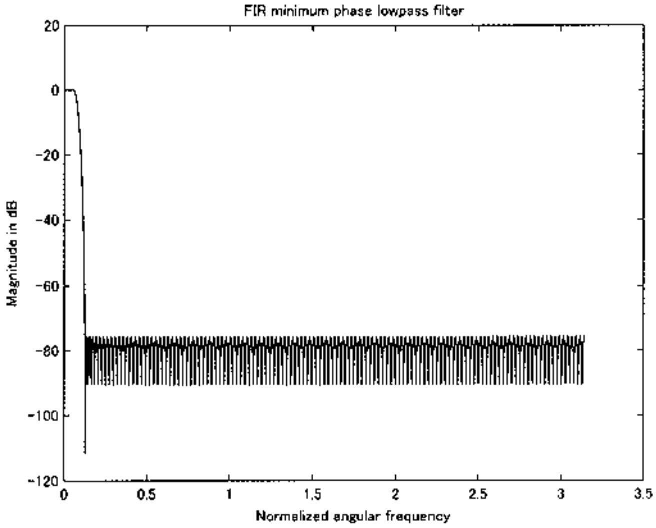

図 3.17　**図 3.18** のインパルス応答を有する最小位相フィルタの振幅特性
Fig. 3.17　Magnitude response of minimum-phase filter.

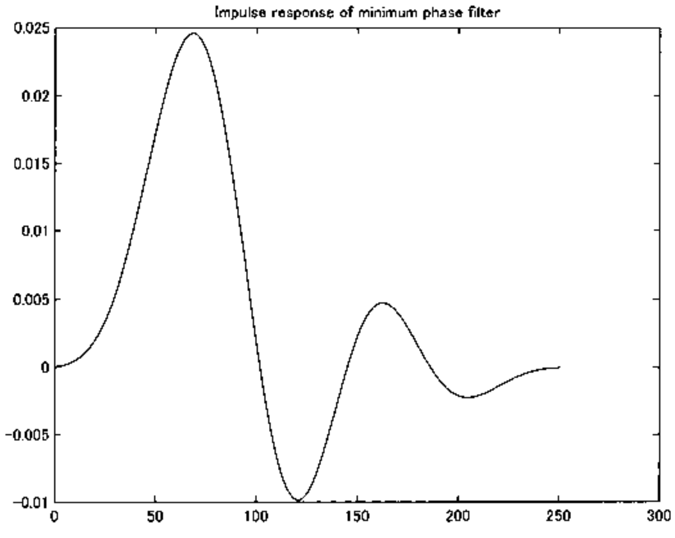

図 3.18　FIR 最小位相型低域通過フィルタのインパルス応答
Fig. 3.18　Impulse response of FIR minimum-phase filter.

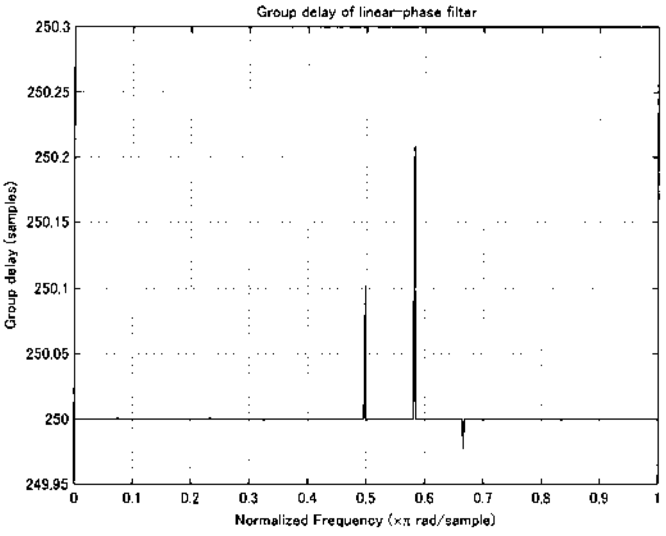

図 3.19　FIR 線形位相型低域通過フィルタの群遅延特性
Fig. 3.19　Group delay of FIR linear-phase filter.

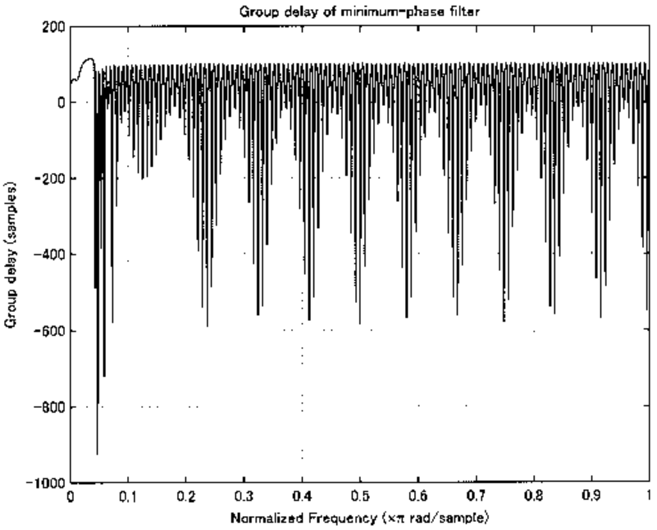

図 3.20　FIR 最小位相型低域通過フィルタの群遅延特性
Fig. 3.20　Group delay of FIR minimum-phase filter.

4. FIR 型 linear-phase filter

ここでは，標準的な FIR 型の linear-phase filter の設計法を例示し，FIR 型の minimum-phase filter に変換する例を示そう．特に，4.2 では，3. で述べた cepstrum を使う方法を示す．また，4.1 では，3. で述べなかった minimum-phase filter の設計法について簡単な説明をしよう．この方法は，初歩的な技法に基づくものであり，K-NET95 型強震計の A/D 変換における decimation filter にも用いられている．技法に関する細かい説明は，木下・他（1997）にあるので参照されたい．ここでは，数値例のみを示す．

4.1 Parks-McClellan の最適 FIR filter 設計法（min-max 法）

文献によれば，この filter 設計法が FIR 型 linear-phase filter の設計法として標準であり，最も使われている方法であるという．ここでは，設計法に内在する思想だけを示し，設計の実際を以下に説明しよう．Parks-McClellan の方法は，目的とする filter の振幅特性 $|H_d(\lambda)|$ を $\cos(\lambda)$ もしくは $\sin(\lambda)$ の多項式で近似するとき，その最大近似誤差を最小とすることから得られる filter $H(\lambda)$ である．即ち，filter $H(\lambda)$ は，誤差特性を

$$E(\lambda) = W(\lambda)[|H(\lambda)| - |H_d(\lambda)|]$$

としたとき，$\max|E(\lambda)|$ を最小とする filter を $\cos(\lambda)$ もしくは $\sin(\lambda)$ の多項式で構成したときの FIR 型 linear-phase filter である．また，$W(\lambda)$ は重み関数であり，特定の周波数帯を他の周波数帯と比較して強調する為に用いられる．これが，Parks-McClellan の方法，或いは，min-max 法と呼ばれるものである（Proakis et al., 1996）.

この設計法では，以下のパラメータが FIR 型 linear-phase filter を規定する．

- *Fs* ：標本化周波数（Hz）
- *Wp*：通過帯域のカットオフ周波数（エッジ周波数）(Hz)
- *Ws* ：阻止帯域のカットオフ周波数（エッジ周波数）(Hz)
- *Rp* ：通過帯域でのリップル（dB）
- *Rs* ：阻止帯域でのリップル（dB）
- *n* ：filter の次数

この方法は，通過帯域と阻止帯域のみを規定するものであり，中間の遷移帯域は規定が出来ないと言う特徴を有するものである．また，filter の次数を自動的に決定する研究もあり，通常，Rabiner and Herrmann による方法が用いられている .

次に，Matlab 上で，この方法を示そう．プログラムは以下の通りである．これは，関数名 mc.m とする．

```
% mc.m
function [h,f]=PM_method(n,Wp,Ws,Rp,Rs,Fs,option)
% Marks-McClellan method using Remez exchange
% algorithm and Chebyshev approximation

% input paramerers
% "option"=0; determin optimal order by using the method
%           proposed by Rabiner & Herrmann
%        =1; put the order of filter into a parameter "n"
% n       ; filter order
% m       ; desired magnitudes
% Wp      ; cutoff (edge) frequency of passband in Hz
% Ws      ; cutoff (edge) frequency of stopband in Hz
% Rp      ; passband ripple in dB
% Rs      ; stopband ripple in dB
% Fs      ; sampling frequency in Hz

w=[1 1];   % initial weights
m=[1 0];   % desired magnitudes for lowpass filter
f=[Wp Ws];

dev=[(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1) 10^(-Rs/20)];

if option==0
[n,fo,mo,w]=remezord(f,m,dev,Fs);
% n; optimum order of LPF
b=remez(n,fo,mo,w);
else
[nopt,fo,mo,w]=remezord(f,m,dev,Fs);
b=remez(n,fo,mo,w);
end

[h f]=freqz(b,1,4096,Fs);
plot(f,20*log10(abs(h)))
title('FIR lowpass filter');
xlabel('Frequency in Hz');
ylabel('Magnitude in dB');

% End of program
```

出力として，FIR 型 filter の係数が $b([1{:}n+1])$ に格納される．使い方を説明しよう．Matlab 上でパスが通っているフォルダ内に関数 mc.m を格納しておく．次に，Matlab を開き，次のコマンドを入れる．

>> [b,f]=mc(160,500,17500,1,40,256000,0)；

これは，次数 161，通過帯域のカットオフ周波数 500Hz，阻止帯域のカットオフ周波数 17.5kHz，通過帯域のリップル 1dB，阻止帯域のリップル 40dB，標本化周波数 256kHz として，filter の最適次数を自動的に求める為の入力である．つまり，Σ-δ 変調を考えたとき，変調周波数 256kHz の信号を 200dB 以上減衰させる事のみを目的とした FIR 型 linear-phase filter である．このコマンドの最後の数値 0 は，最適次数を自動的に求めることを指定するものであり，これを 0 以外の整数値とすると，入力された 160 が有効となり，161 次の filter となる．そこで，Matlab 上で，このコマンドを入れてみよう．最適次数が 21 となり，**図 4.1** の様な FIR 型 linear-phase filter となる．阻止帯域のリップルの大きさを 40dB とした結果である．理論的には，これが正当な結果かもしれないが，今回の目的には適当でない．

教科書通りでは，役に立たないので，FIR 型 linear-phase filter の次数を強制的に上げねばならない．例として，次数を 161 次とすると（下記のコマンド上では，*n*-1 を入力する），次のコマンドにより，**図 4.2** の FIR 型 linear-phase filter が設計される．

>> [b,f]=mc（160,500,17500,1,40,256000,1）;

低周波数域を拡大すると，**図 4.3** となる．通過帯域に若干のリップルが見られるが，10^{-6}dB 内に収まる．

さて，当然の事ながら，この filter は linear-phase filter であり，256kHz の標本化では，通常，標本化周波数を小さくする次段の filter による decimation の際にいわゆる“因果性”が壊されてしまう．“因果性”を保持させるには，次に行うリサンプルの周波数を調整すればよい．即ち，FIR 型 linear-phase filter のタップ数が 161 であるから，161/ 256000 = 0.644 [ms] がタップ長となる．従って，これより粗い標本化を次の decimation の為に行えば，“因果性”は保持される．つまり，この FIR filter の係数が影響しない程度に標本化をすればよい．この場合では，次段の標本化を 1kHz 程度とすれば“因果性”に問題はない（但し，1kHz では，**図 4.3** に見られるように，殆ど信号は減衰していない為，以下の議論は強引なたとえ話である）．

例えば，通過帯域のカットオフ周波数を 50Hz，阻止帯域のカットオフ周波数を 100Hz として，18 次の IIR 型の Butterworth 型低域通過 filter を標本化周波数 1kHz で設計してみよう．Matlab 上では，

```
Wp = 50/500; Ws = 100/500;
[n,Wn] = buttord（Wp,Ws,3,192）;
n = 18
[b,a] = butter（n,Wn）;
freqz（b,a,4096,1000）;
```

をコマンドラインから続けて入力する．結果が，**図 4.4** となる．50Hz 迄平坦であり，200Hz で -200dB の減衰量が確保されるのが判ろう．従って，3 段目の filter は，標本化周波数を 400Hz か 500Hz とするのが最適となる．400Hz とした場合，200Hz の信号を取り出すのは，一つおきに標本とする．

3 段目の filter の標本化周波数を 400Hz として，低域通過 filter を Butterworth 型で設計する．但し，カットオフ周波数を 50Hz とする．Matlab 上では, 次のコマンドとなる．

```
Wp = 50/200; Ws = 100/200;
[n,Wn] = buttord（Wp,Ws,3,192）;
n = 10
[b,a] = butter（n,Wn）;
freqz（b,a,4096,400）;
```

2 段目の filter における 100Hz での減衰は，-100dB 以上であるから，**図 4.5** に示す 3 段目の filter における減衰を加えると，総合的な filter は，およそ -200dB 程度の減衰が 100Hz で得られる．当然の事ながら，50Hz 迄の平坦特性は確保される minimum-phase 系となる．

4.2 Cepstrum 技法による FIR 型 linear-phase filter から FIR 型 minimum-phase filter への変換

ここでは，3. で述べた cepstrum を用いて FIR 型 linear-phase filter を FIR 型 minimum-phase filter へ変換するやや本格的な例を示そう（Gian *et al.,* 1982）．この方法は，教育的ではあるが，現実に用いるには，零位相（応答）関数等を用いるため，その理論的背景を理解することが多少面倒であろう．以下，その方法を，プログラム cepstrum_miniphase.m に沿って，三つの段階に分けて示そう．

```
% cepstrum_miniphase.m

function [b1,h2]=cm_method(n,Wp,Ws,Rp,Rs,Fs)
% Example: [b,h2]=cepstrum_miniphase(128,2000,20000,1,
% 40,256000);

% Construction linear-phase filter by
% Parks-McClellan method using Remez exchange algorithm
% and Chebyshev approximation
% input paramerers
% n     ; filter order
% m     ; desired magnitudes
% Wp    ; cutoff (edge) frequency of passband in Hz
% Ws    ; cutoff (edge) frequency of stopband in Hz
% Rp    ; passband ripple in dB
% Rs    ; stopband ripple in dB
% Fs    ; sampling frequency in Hz
% w     ; initial weight for wxample w=[1 1]
% mm    ; desired magnitudes for lowpass filter
% ff    ; frequency points specifying mm

ff=[0 2*Wp/Fs 2*Ws/Fs 1];
mm=[1 1 0 0];

% Filter coefficients (impulse response) of H(z)
b=remez(n,ff,mm);

% Impulse response of filter H(z)
figure
plot(b)
title('Initial impulse response')

% |H(z)|
[h f]=freqz(b,1,4096,Fs);
scaleA=h(1);
figure
plot(f,20*log10(abs(h)));
title('FIR lowpass filter');
xlabel('Frequency in Hz');ylabel('Magnitude in dB');

% Zero-phase function Hr
figure
zerophase(b);
[Hr,freqency]=zerophase(b,1,'whole');
```

```
dd2=min(Hr);

% Pole/zero diagram of H(z)
figure
a=[1];
zplane(b,a);

% Calculation of H1(z)
% d2=10^(-Rs/20);
d2=abs(dd2);
n2=(n+2)/2;
b(n2)=b(n2)+d2;
b1=b;

% Pole/zero diagram of H1(z)
figure
zplane(b,a);

% Zero-phase function H1r
figure
zerophase(b);
[Hrrr,frequency2]=zerophase(b,1,'whole');
min(Hrrr);

% Calculation of the impulse  response of H1(z)
% L: length of impulse resopnese
L=4096;
[h1,t1]=impz(b,1,L);

% Impulse response of H1(z)
figure
plot(h1);
title('Impulse response of H1(z)')

% Modefied impulse respones of H1(z)
rou=1.02; % tentative
for k=1:L
   mh1(k)=h1(k)*rou^(-k+1);
end

% Calculation of the cepstrum of mh1
xhat=fft(mh1,L);
m=abs(xhat); pm=unwrap(angle(xhat));
HW=m.*exp(j*pm);
acc=ifft(log(abs(HW))); % cepstrum coefficients
acc=real(acc);
acc1=[acc(L/2+2:1:L) acc(1:1:L/2+1)];

% Cepstrum of filter {mh1}
cx=[-L/2+1:1:L/2];
figure
plot(cx,acc1)
title('Cepstrum of mh1')

% Cepstrum of H(z)
c2(L/2)=acc1(L/2);
for k=1:L/2-1
   c2(L/2+k)=2*acc1(L/2+k);
   c2(k)=0;
end
c2(L)=acc1(L);

% Cepstrum of H(z)
figure
plot(cx,c2)
title('Cepstrum of H(z)')

% Reconstruction of minimum-phase cepstrum coefficients
for k=1:L/2+1
   cc(k)=c2(L/2+k-1);
end

cc2=cc';
h2(1)=exp(cc2(1));
h2(2)=cc2(2)*h2(1);
for kk=3:n
  s=cc2(kk)*h2(1);
  for k=1:kk-2
     s=s+(k/(kk-1))*cc2(k+1)*h2(kk-k);
  end
   h2(kk)=s;
end

rou=1;
for k=1:n
   h2(k)=h2(k)*rou^(k-1);
end

% Impulse respoponse of H(z)
figure
plot(h2);
title('Impulse response of H(z)')

% Pole/zero daiagram of H(z)
figure
zplane(h2)

% Magnitude function of minimum-phase filter H(z)
[hh ff]=freqz(h2,1,4096,Fs);
scaleB=hh(1);
hh=hh*scaleA/scaleB;
figure
plot(ff,20*log10(abs(hh)));
title('FIR minimum-phase filter');
```

```
xlabel('Frequency in Hz');
ylabel('Magnitude in dB');

% End of program
```

① 最初に，元となる FIR 型 linear-phase filter を 4.1 の方法に従って設計する．Matlab のコマンド・ラインから

[b,h2]=cepstrum_miniphase（128,2000,20000,1,40,256000）;

を入力する．これは，linear-phase filter を最初に設計することを意味し，次数 128，通過帯域の遮断周波数が 2kHz，阻止帯域のエッジ周波数 20kHz，通過帯域のリップル 1dB，阻止帯域のリップル 40dB，標本化周波数 256kHz という仕様である．得られた linear-phase filter の係数（インパルス応答）を**図 4.6** に示す．この filter を $H(z)$ とし，その利得特性を**図 4.7** に示す．次数 n は 128 であり，ここでは n が偶数であることを要求しよう．

この $H(z)$ は，$H(z) = Hr(\lambda)e^{i\theta(\lambda)}$ と一般に展開される．ここで，$Hr(\lambda)$ を零位相（応答）関数という．即ち，位相零 $(\theta(\lambda) = 0)$ の時，$H(z) = Hr(\lambda)$ となることによる名称である．明らかに，**図 4.7** に示す一般の利得特性 $|H(z)|$ とは異なる．これは，$Hr(\lambda)$ が負の値をも許容する為である．**図 4.6** に示す filter $H(z)$ の零位相関数 $Hr(\lambda)$ を求める為には，Matlab のコマンド zerophase を用いればよい．結果は，**図 4.8** となる．この**図 4.8** における阻止帯域を拡大すると，これは**図 4.9** の様になり，阻止帯域で正負の値を持つことが判る．

この時，$H(z)$ の零－極配置を調べると，これは**図 4.10** となる． 即ち，原点に $n = 128$ 重の極を有し，零点が単位円上と単位円に対して相反関係を有する共役配置として現れる linear-phase filter としての特性である．

② 次のステップとして，$H_1(z) = H(z) + \delta_S z^{-n/2}$ なる新たな filter $H_1(z)$ を作る．ここで，δ_S は，**図 4.9** の阻止帯域におけるリップルの大きさ（つまり，$0 \pm \delta_S$ のリップルが**図 4.9** の阻止帯域にある）とする．この時，新たに作成された $H_1(z)$ の零－極配置を調べると，これは，**図 4.11** となる．この $H_1(z)$ が持つ零点配置に注目すると，共役関係にある零点配置は同じであるが，単位円上に並んだ零点が殆ど全て 2 重点になることに気がつこう（本来は，単位円上の全ての零点が 2 重点にならねばいけない）．なお，極は原点における 128 重極である．この $H_1(z)$ の零位相関数を求めると，これは，**図 4.12** となる．**図 4.9** と同じように，阻止帯域を拡大すると，これは，**図 4.13** となる．零位相関数の阻止帯域が非負となっていることが判る．これが $H_1(z)$ の特徴であり，$H_1(z) = H(z) + \delta_S z^{-n/2}$ の $\delta_S z^{-n/2}$ による効果である．即ち，この様な非負伝達関数を factorization することにより，minimum-phase filter と maximum-phase filter にこれを分けることを可能とする為である．

③ この段階で，FIR 型の minimum-phase filter を構築するのには 2 通りの方法がある．1 つは，次数 n が小さい場合に適用可能なものである．これは，**図 4.11** の零点－極配置から，以下のような零点と極を選び出し，これを用いて minimum-phase filter $H_2(z)$ を作るものである．即ち，

(1) **図 4.11** にある極の半分である $n / 2 = 64$ の極

(2) 複素共役の関係にある零点の内，単位円内にある零点

(3) 単位円上にあるほぼ 2 重零点の内，各々の 1 つをとりだし，これから $H_2(z)$ を構成する．当然のことながら，残りの零点と極から maximum-phase filter が構成される．この方法は，n が小さければ，十分に実用的である．一般に，n が 20 程度までである．

さて，n が大きいときには，零点を数値計算で求めることに誤差が伴うのと，実際に得られた零点の再配置が面倒なため，次の第 2 の方法が $H_2(z)$ の構築に用いられる．以下，これを説明する．まず，$H_1(z)$ のインパルス応答を求める．インパルス応答の最初の n 個は，$H_1(z)$ が FIR 型 filter であるため，その係数と一致する．これは，**図 4.14** となる．n が 128 を超えると，当然のことながら，インパルス応答は零となる．そこで，$H_1(z)$ のインパルス応答を $\{h_1(k)\}$ とする．問題は，この $\{h_1(k)\}$ から $H_2(z)$ のインパルス応答 $\{h_2(k)\}$ を求めることになる．$\{h_2(k)\}$ は FIR 型 minimum-phase filter であるから，得られた $\{h_2(k)\}$ がそのまま FIR filter の係数となる．そこで，$\{h_1(k)\}$ から $\{h_2(k)\}$ を求める方法を考えよう．これには，cepstrum 変換を用いる．いま，$\{h_1(k)\}$ と $\{h_2(k)\}$ の cepstrum を，各々，$\{c_1(k)\}$ 及び $\{c_2(k)\}$ としよう．$\{c_1(k)\}$ を表示すると，これは，**図 4.15** となる．cepstrum の計算には，Fourier 変換と逆 Fourier 変換を用いるが，通常，変換の長さ L は，$L >> 8n$ とする．**図 4.15** は，$L = 4096$ の場合である．cepstrum は原点とその近くに集中していることが判ろう．また，$k < 0$ に非零の $c_1(k)$ が存在し，filter h_1 は minimum-phase filter とならないことが判ろう．

3.2 で述べた方法に従って，minimum-phase filter $\{h_2(k)\}$ を得るためには，まず，$\{c_1(k)\}$ から $\{c_2(k)\}$ を求める．即ち，

$$c_2(k) = 0, k < 0$$
$$c_2(k) = c_1(0), k = 0$$
$$c_2(k) = [c_1(k) + c_{L-k}(k)], k > 0$$

とする．得られた $\{c_2(k)\}$ は，**図 4.16** の様になる．これは，$k < 0$ で $c_2(k) = 0$ としたため，$c_2(k)$ から得られる filter $h_2(k)$ は minimum-phase filter となる．次に，$\{c_2(k)\}$ から $\{h_2(k)\}$ を求める．このため，$\{c_2(k)\}$ から minimum-phase 成分を下記により抜き取る．

$$h_2(k) = 0, k < 0$$
$$h_2(0) = \exp[c_2(0)], k = 0$$
$$h_2(k) = c_2(k)h_2(0) + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{n}{k} c_2(n)h_2(k-n), 0 < k < n/2$$

この様にして得られた filter $\{h_2(k)\}$ は，**図 4.17** となる．これが求める FIR 型 minimum-phase filter のインパルス応答である．得られた filter $\{h_2(k)\}$ は $H_2(z)$ そのものであるから，$H_2(z)$ の零位相関数と利得応答特性を求めることができる．この $H_2(z)$ の極－零点配置は，**図 4.18** の様になり，全ての極と零点が単位円内に存在する．従って，filter $H_2(z)$ は

minimum-phase filter となる．この filter の利得特性は，**図 4.19** となり，**図 4.7** の利得特性を有する linear-phase filter に対応する minimum-phase filter となる．

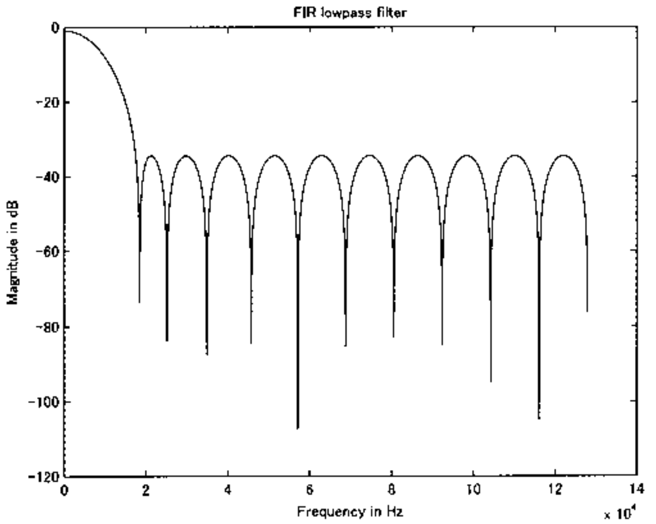

図 4.1　最適 FIR 線形位相型低域通過フィルタの振幅特性
Fig. 4.1　Magnitude response of optimal linear-phase FIR filter.

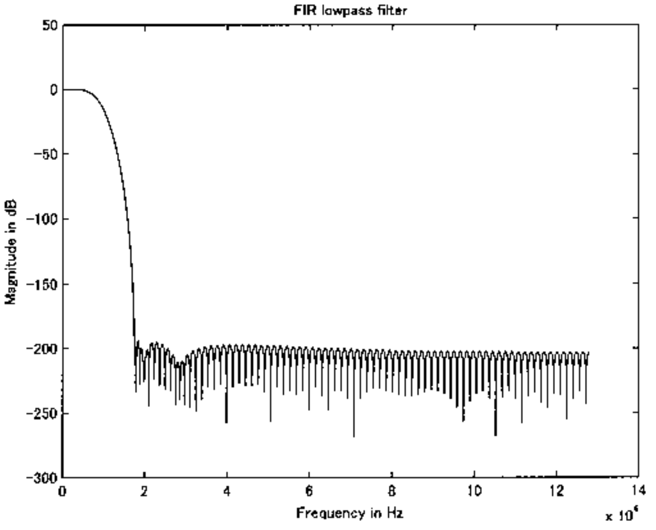

図 4.2　FIR 最小位相型低域通過フィルタの振幅特性
Fig. 4.2　Magnitude response of minimum-phase FIR filter.

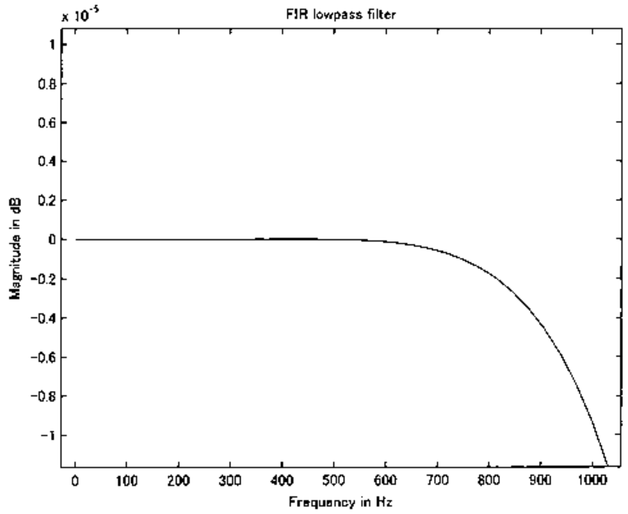

図 4.3　**図 4.2** で示された振幅特性の詳細通過帯域

Fig. 4.3　Pass-band detail of **Fig.4.2**.

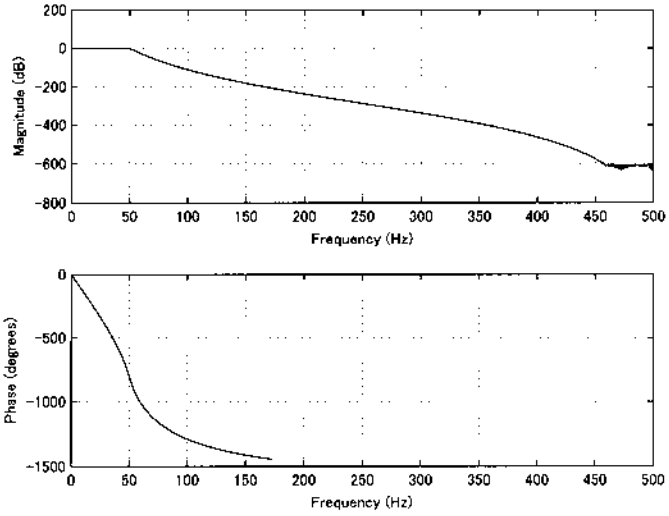

図 4.4　IIR 型バタワース低域通過フィルタのボード線図

Fig. 4.4　Bode diagram of IIR Butterworth filter.

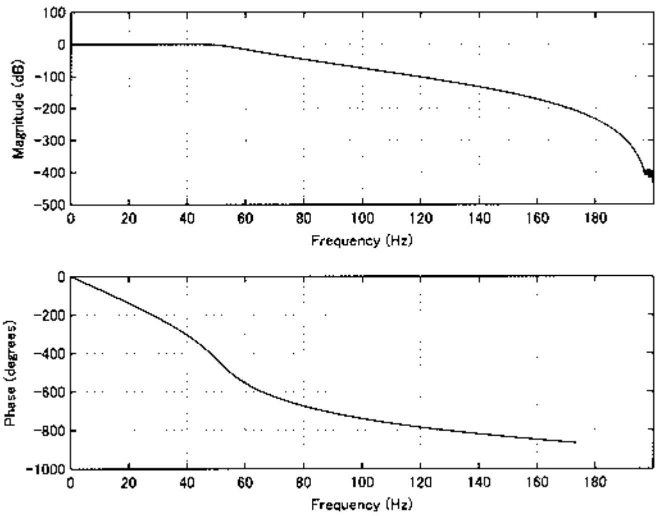

図 4.5　IIR 型バタワース低域通過フィルタのボード線図

Fig. 4.5　Bode diagram of IIR Butterworth filter.

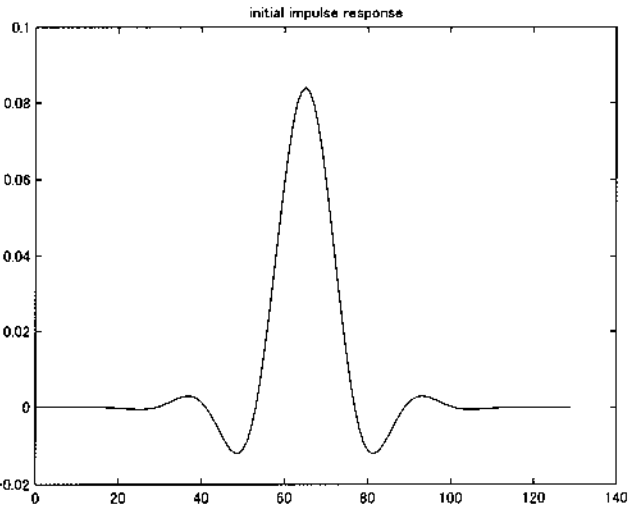

図 4.6　FIR 線形位相フィルタ阻止のインパルス応答

Fig. 4.6　Impulse response of linear-phase FIR filter.

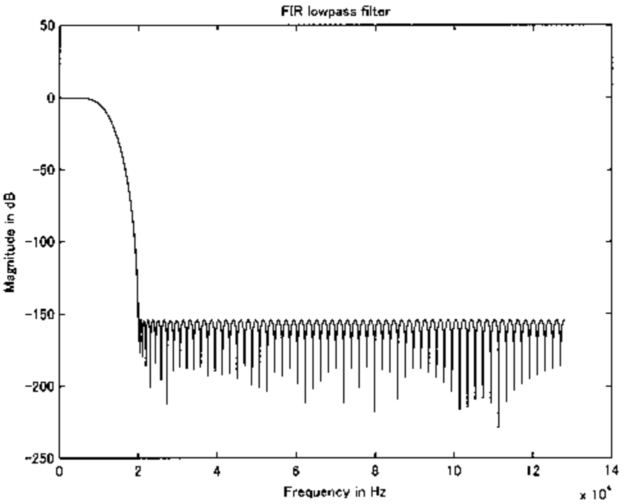

図 4.7　**図 4.6** のインパルス応答を有する線形位相フィルタの振幅特性

Fig. 4.7　Magnitude response of linear-phase filter.

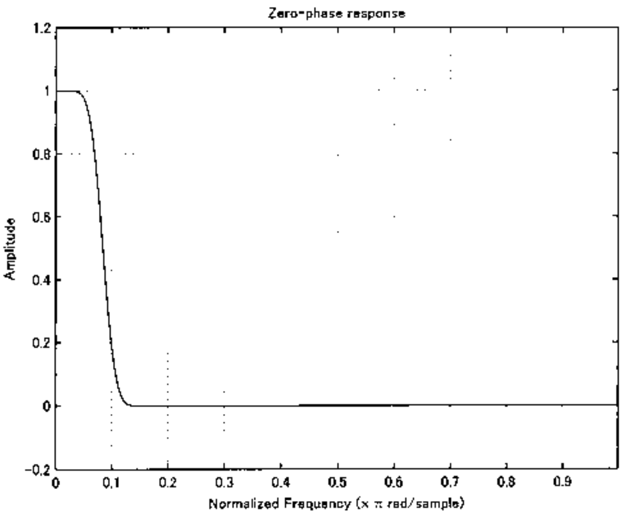

図 4.8　**図 4.6** のインパルス応答を有する線形位相フィルタの零位相関数

Fig. 4.8　Zero-phase response of linear-phase filter.

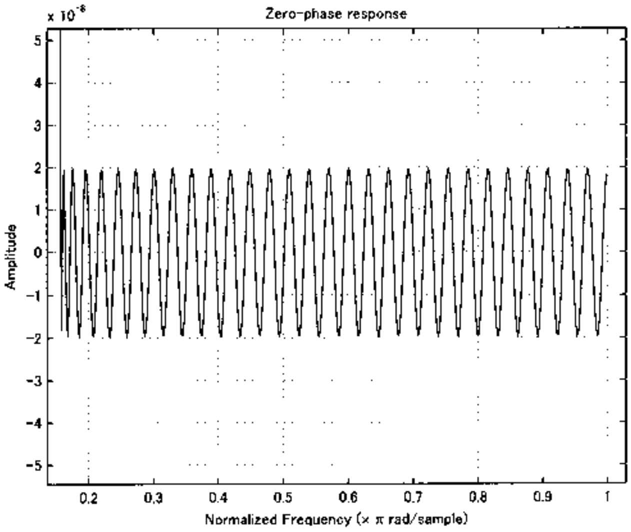

図 4.9　図 **4.8** の零位相関数における詳細阻止帯域

Fig. 4.9　Stop-band detail of zero-phase response shown in **Fig.4.8**.

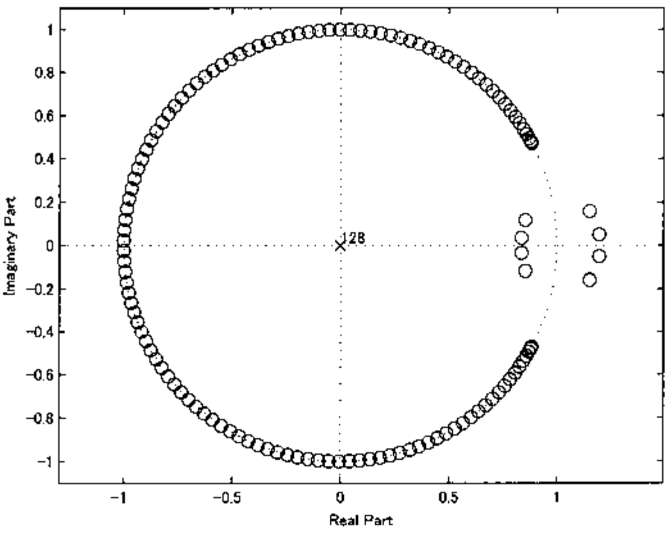

図 4.10　**図 4.6** のインパルス応答を有する線形位相フィルタの極－零点配置図

Fig. 4.10　Pole/zero diagram for linear-phase filter.

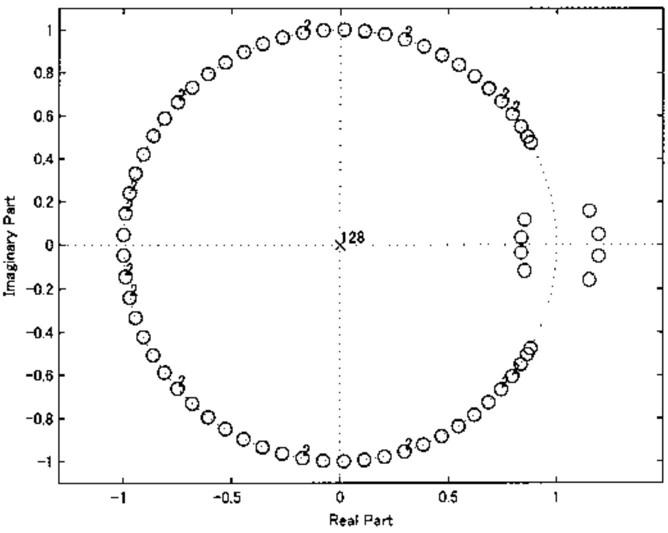

図 4.11　補助関数 $H_1(z)$ の極－零点配置図

Fig. 4.11　Pole/zero diagram of auxiliary function $H_1(z)$.

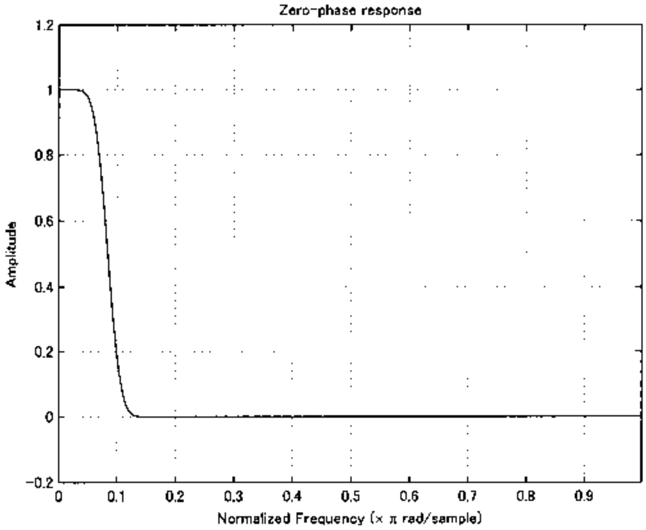

図 4.12　補助関数 $H_1(z)$ の零位相関数

Fig. 4.12　Zero-phase response of auxiliary filter $H_1(z)$.

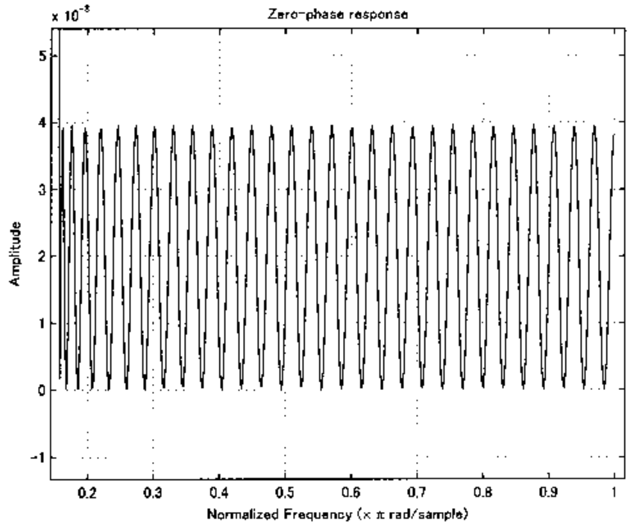

図 4.13　**図 4.12** で示した零位相関数における詳細阻止帯域

Fig. 4.13　Stop-band detail of zero-phase response shown in **Fig.4.12**.

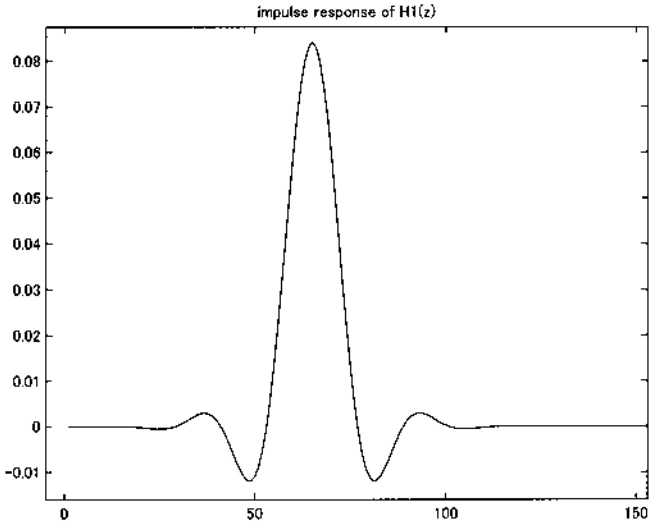

図 4.14　補助関数 $H_1(z)$ のインパルス応答

Fig. 4.14　Impulse response of auxiliary filter $H_1(z)$.

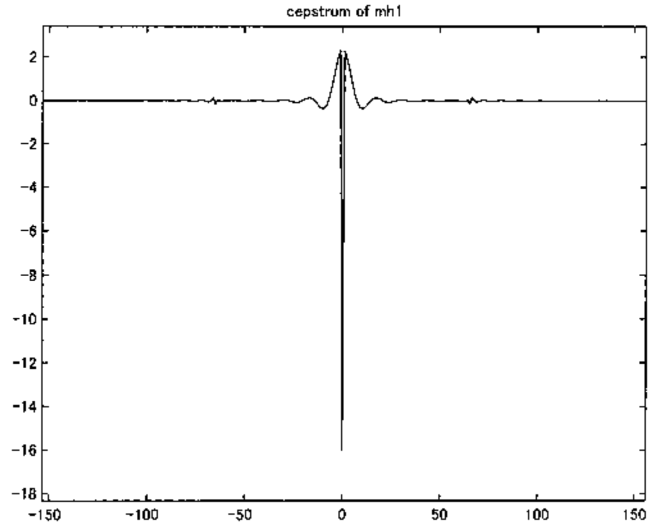

図 4.15　**図 4.14** で示したインパルス応答のケプストラム

Fig. 4.15　Cepstrum of impulse response shown in **Fig.4.14**.

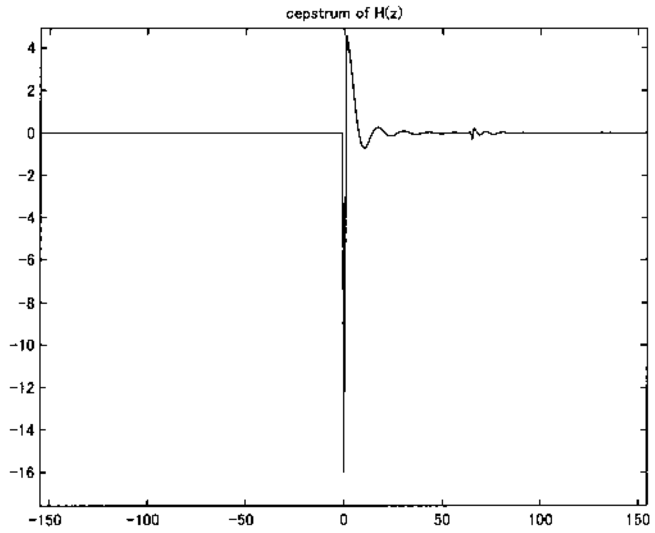

図 4.16　最小位相信号のケプストラム

Fig. 4.16　Cepstrum of minimum-phase sequence.

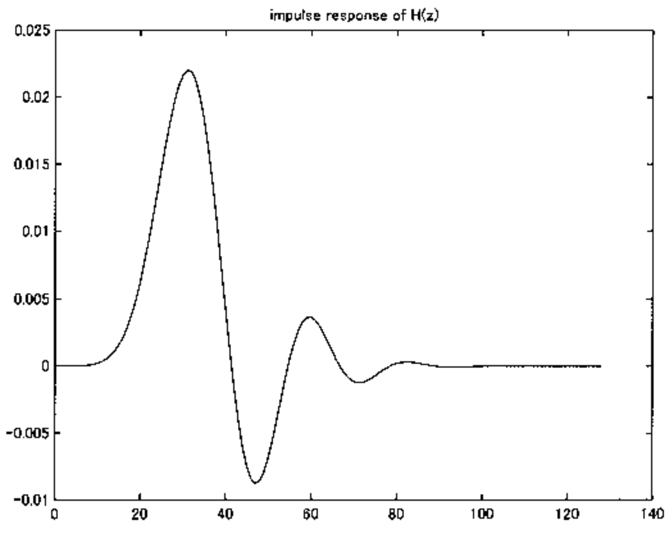

図 4.17　FIR 最小位相フィルタのインパルス応答

Fig. 4.17　Impulse response of minimum-phase FIR filter.

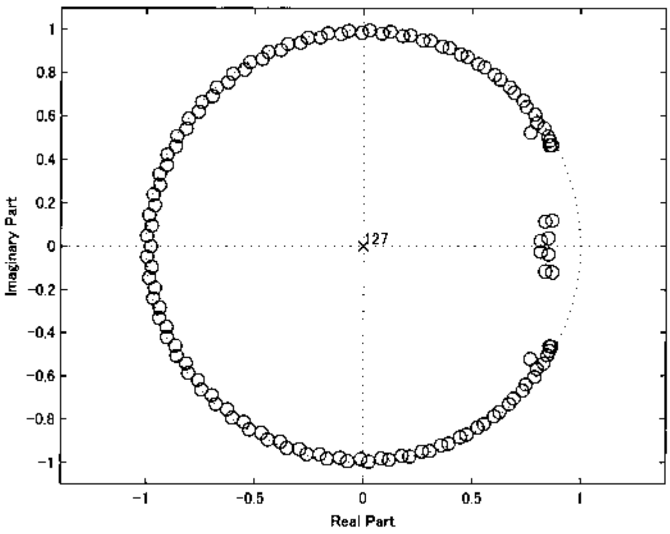

図 4.18　**図 4.17** のインパルス応答を有する最小位相フィルタの極－零点配置図

Fig. 4.18　Pole/zero diagram for minimum-phase filter.

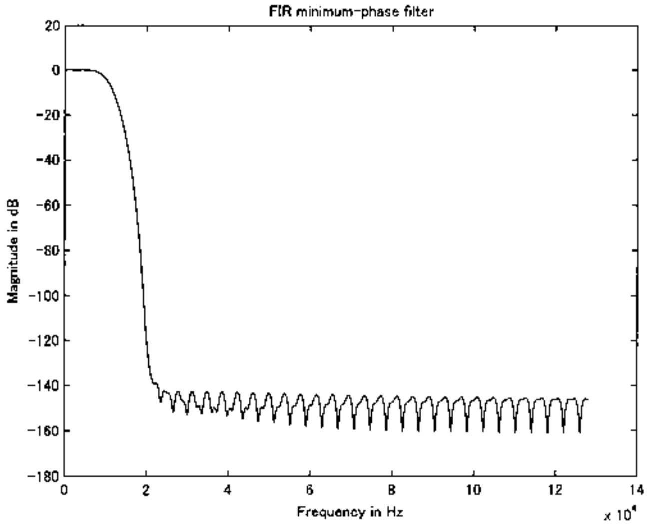

図 4.19　**図 4.17** のインパルス応答を有する最小位相フィルタの振幅特性

Fig. 4.19　Magnitude response of minimum-phase filter.

5. 地震動構成要素の digital filter 表現

ここでは，地表の地震動$A(\omega,r)(=G(\omega)\cdot P(\omega,r)\cdot S(\omega))$を形作る site effect $G(\omega)$，経路減衰特性 $P(\omega,r)$ 及び震源特性 $S(\omega)$ を規定する digital filter がどのように構築されるかを考察し，例を示すこととする．これは，各 filter の持つ関数形（例えば，minimum-phase 関数とか，maximum-phase とか）により，$A(\omega,r)$ の評価が異なってくることと，若干の物理的要求を満たすためである．但し，各 digital filter は因果性を満足するという前提に立脚する為，one-side function（零と正の時間域に存在する片側関数）となる．なお，厳密に言うならば，震源特性を表現する震源時間関数に因果性の概念はない．本報告では，$S(\omega)$ がインパルス入力に対する digital filter の応答の振幅特性と見なすことにより，因果性を震源特性に導入する．また，これらの特性が地震記録から逆に推定されるという事実から，実現可能（filter の逆関数が持つエネルギが有限となる）関数として良かろう．

5.1 サイト効果

ここで考察対象とするサイト効果は，SH 波の堆積層における伝達関数としよう．従って，最も簡単な場合，$G(\omega)$ として，水平多層構造の SH 入射波に対する伝達関数がどのような digital filter となるかが問題となる．この伝達関数は，Goupillaud（1961）の equal-time layered model から z 変換形を求めると，全ての極と零点（多重点）が単位円内に存在することが判る（Kinoshita,1999）．即ち，各層の two-way time を ΔT とする（$p+1$）層 の equal-time layered model を考える．最下層が（$p+1$）層であり，層順は地表側から番号づけられているものとする．このとき，第 n 層と第 $n+1$ 層の境界における第 $n+1$ 層内上昇 SH 波の反射係数は次式となる．

$$k_n=(a_{n+1}-a_n)/(a_{n+1}+a_n), n=1,2,...,p$$

ここで，$a_n=\rho_n\beta_n\cos\theta_n$は第 n 層におけるインピーダンスであり，ρ_n,β_n及び θ_nを，各々，第 n 層における密度，S 波速度及び入射角とする．このとき，水平多層構造の伝達関数は，z 変換形で表示すると，次式となる(Kinoshita,1999)．

$$G(\lambda)=Az^{-p/2}/\sum_{n=0}^{p}b_n z^{-n}$$

ここで,

$$\lambda=\omega\Delta T\ , A=2\prod_{n=1}^{p}(1+k_n)$$

であり，$\{b_n\}_{n=1}^{p}$ は，Durbin- Levinson の漸化式：

$$a_n^n=k_n, n=1,2,...,p$$
$$a_m^n=a_m^{n-1}+a_n^n a_{m-1}^{n-1}, m=1,2,...,n-1$$

から，$b_n=a_n^p, n=1,2,...,p$ として求まる．なお，$b_o=1$ とする．この伝達関数 $G(\lambda)$ の極と零点は，全て単位円内に存在し，minimum-phase 関数となる．従って，サイト効果 $G(\omega)$ は minimum-phase filter として構築されよう．

一般的に言って，線形応答の範囲におけるサイト効果は因果性を満足する安定な系である．ただ，上記のように具体的な関数表現が困難なため，一般論を避けているにすぎない．従って，以下の議論は，equal-time layered model に依存しない．

さて，$G(\omega)$ に対応する minimum-phase filter の計算方法を示そう．因果性の仮定に基づき，サイト効果 filter の応答を時間 $t<0$ において零とする．また，サイト効果 filter の minimum-phase 特性を仮定する．このとき，サイト効果 filter の位相特性は，クラマース・クローニッヒの関係を用いて，振幅特性 $|G(\omega)|$ から求めることが出来る．即ち，サイト効果 filter の位相特性は，離散領域における Hilbert 変換を用いて，3.3 で示したように，

$$\arg G(e^{i\lambda})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|G(e^{i\xi})\right|\cot(\frac{\lambda-\xi}{2})d\xi$$

で与えられる．ここで，標本化時間を ΔT としたとき，周波数パラメータは正規化円振動数$\lambda=\omega\cdot\Delta T, |\lambda|\le\pi$となる．この式は，実 cepstrum $\ln\left|G(e^{i\lambda})\right|$ と位相特性 $\arg G(e^{i\lambda})$ の関係を示すものであり，直接計算せずに，cepstrum 領域で non-minimum-phase 項を minimum-phase 項に変換する操作によっても filter のインパルス応答 $\{g(t\Delta T)\}$ を求めることが出来ることを意味している．以下，離散領域での計算を主体とするため，t を $t\Delta T$ としよう．さて，$\ln\left|G(e^{i\lambda})\right|$ から，位相特性 $\arg G(e^{i\lambda})$ が求まれば，サイト効果 filter $\{g(t)\}$ は，その伝達特性 $\left|G(e^{i\lambda})\right|\exp[i\arg G(e^{i\lambda})]$ の逆 Fourier 変換で与えられる．

一つの例を示そう．ここでは，観測により推定された堆積層での短周期増幅特性として，木下･大池（2002）で示された下総地殻活動観測施設での結果を用いる．用いた増幅特性は，0.5Hz ～ 16Hz におけるものであり，基盤での入射角を 30° とするものである．また，上記周波数域外へ増幅特性を拡大するときは，この施設での速度構造を用い，16Hz を超える周波数域における S 波の Q を 100 とし，0.5Hz より低周波数域での Q 値を 10 と仮定して計算した．計算結果と観測により得られた増幅特性は，3 次のスプライン補間で平滑化し，これを求める minimum-phase filter の振幅特性 $|G(\lambda)|$ とした．このようにして決定された振幅特性をもとに Hilbert 変換による方法と cepstrum による方法で求めた FIR minimum-phase filter を**図 5.1** に示す．これは，次数を 512 とする FIR filter であるが，Nyquist 周波数を 50Hz とするものである．図から，2 つの方法は，同一の filter を設計することが判ろう．また, 得られた filter の振幅特性を**図 5.2** に示す．図中の点線で示した振幅特性が，目標とするものであるが, 0.5Hz ～ 50Hz において, 設計された filter の振幅特性は，これに一致する．しかしながら，0.5Hz 以下の周波数域においては追随しない．低周波数域での振幅特性に合う filter を設計するためには，2 つの方法が考えられる．一つは filter の次数を上げることであるが，これは計算上現実的ではなかろう．他の一つは，Nyquist 周波数を下げる

方法である．ちなみに，Nyquist 周波数を 12.5Hz としたときの結果を，**図 5.3** に示す．確かに，0.1Hz ～ 12.5Hz の周波数域において，設計された FIR filter の振幅特性は，目標とする振幅特性と一致している．これは，Hilbert 変換による方法でも，cepstrum を用いる方法でも認められる．

5.2　経路減衰効果

ここで扱う $P(\omega, r)$ がどのような digital filter となるかは，r と ω を，各々，震源距離及び円振動数としたとき，$P(\omega, r)$ に含まれる周波数依存性を有する項の Fourier 変換：

$$\exp[i\kappa r]\ \ (=\exp[-\alpha(\omega)r + i2Q\alpha(\omega)r])$$

に支配される．通常の経路減衰表現である $\alpha(\omega)=\omega/2Qv$ の形式を用いると，$\exp[i\kappa r]$ の時間関数形（逆 Fourier 関数）は，因果性を満足せず，対称波形となる（Aki and Richards,1980）．Aki and Richards（1980）によれば，Fourier 変換 $\exp[i\kappa r]$ の時間関数形は，これが因果性を満たし，かつ，分散性を有するとき，minimum-phase signal となる．但し，これには Q が一定の条件の下で，地震波の伝播速度のごく弱い周波数依存性を許容している．しかしながら，Azimi *et al.*（1968）のモデルで扱われたように，Q が一定の条件を緩和させないと，Fourier 変換 $\exp[i\kappa r]$ の時間関数形は minimum-phase signal とはならない．本報告においても，$P(\omega, r)$ の逆 Fourier 変換（これが，$P(\omega, r)$ の filter のインパルス応答となる）が因果性を満たし，かつ，分散性を有するように，minimum-phase filter により $P(\omega, r)$ を構成する．

$P(\omega, r)$ に対応する minimum-phase filter の計算例を示そう．まず，Hilbert 変換による方法で求めた FIR minimum-phase filter を**図 5.4** に示す．これは，震源距離 $r = 150$km，伝播速度 $v = 4.4$km/s，S 波の Q を 300 としたとき，

$$P(\omega,r) = r^{-1}\exp[-\omega r/2Qv]$$

から導かれる minimum-phase filter の係数（インパルス応答）$p(t)$ である．ここで，$\Delta T = 0.005$s としている．次に，周波数依存型の Q 構造を有する場合の計算例を示そう．まず，目標とする Q 構造として，0.5Hz ～ 16Hz の範囲で，Kinoshita（1994）の結果を用いる．この周波数域外では，高周波数域で $Q = 1{,}000$ を，低周波数域で $Q = 200$ とし，全周波数域での Q を 3 次のスプライン補間で平滑化して用いる．即ち，経路効果を，

$$P(\omega,r) = \left(\rho\beta/\rho_o\beta_o\right)^{1/2} r^{-1}\exp[-\omega r/2Qv]$$

とする．ここで，$\rho\beta$ と $\rho_o\beta_o$ は，各々，震源域及び観測地点（ここでは基盤域）における S 波のインピーダンスとする．また，震源距離を 200km，経路における S 波の伝播速度を 4.4km/s とした場合，$1/Q$ 構造と $P(\omega, r = 200\text{km})$ は，**図 5.5** の様になる．この時，振幅特性 $P(\omega, r)$ を有する次数 257 の FIR minumin-phase filter は，**図 5.6** となる．図では，Hilbert 変換による方法と cepstrum による方法を示しているが，得られた結果は一致している．

サイト効果と経路減衰効果に minimum-phase filter を用いることは，設計用地震動の合成という工学的問題における地震動のエンベロープの与え方の理論的背景となる．即ち，エンベロープをランニング・スペクトルの領域でみたとき，これは minimum-phase 特性そのものとなるのが判ろう．

5.3　震源特性

震源特性 $S(\omega)$ は，震源時間関数の周波数表現であることを考えると，これまで扱った $G(\omega)$ や $P(\omega, r)$ の様に，単純に minimum-phase 関数として扱うことが困難である．これは，$S(\omega)$ を minimum-phase 関数とすると，震源時間関数そのものに分散性が生じ（時間原点に近ずくにつれてエネルギが集中するため），通常近似的に用いられる三角関数や台形関数のような震源時間関数とすることが不可能となるためである．逆に，震源時間関数が三角関数や台形関数の様な対称波形で近似的に規定されるとすると，三角関数の様に，$S(\omega)$ を linear-phase 関数として扱うのが受け入れやすかろう．これについて，少し説明しよう．いま，**図 5.7(a)** で示すような三角関数を考えよう．これを震源時間関数，或いは，震源特性を filter 表現したときの係数列とする．このとき，この関数の極－零点配置は，**図 5.7(b)** となる．

図 5.7(b) は，単位円上に 7 つの 2 重の零点の組が配置されているのが判ろう．この 2 重の零点のうち，一つが minimum-phase の零点であり，他の一つが maximum-phase の零点となる．この様に，z 変換領域で考えたとき，単位円に対して相反関係にある有限個の零点の組（単位円上である必要はない）から実現される filter が linear-phase filter である．勿論，linear-phase filter は，三角関数から類推される震源時間関数の一つのモデルであり，これが全てではない．また，linear-phase filter は，安定性と因果性を満足する．

では，実際に $S(\omega)$ から linear-phase filter を導くことを考えよう．これには，古典的な周波数 sampling 法（Proakis and Manolakis,1996）を用いる．まず，一様に M 分割した周波数軸上における spectrum $S(\omega)$ を考える．分割した周波数を

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{M}, k = 0,1,\ldots,M_2$$

とする．但し，M_2 は，M が奇数のとき $M_2 = (M\text{-}1)/2$，偶数のとき $M_2 = M/2\text{-}1$ とする．このとき，filter の係数 $\{s(n\Delta T)\}_{n=0}^{M-1}$ は，

$$S(\omega_k) = \sum_{n=0}^{M-1} s(n\Delta T)\exp[-in\omega_k], k = 0,1,\ldots,M-1$$

で定義される．或いは，逆 Fourier 変換を用いて次式で与えられる．

$$s(n\Delta T) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} S(\omega_k)\exp[in\omega_k]$$

上式を用いて，ここでは，ω^{-3} モデルに関して得られた $\{s(n\Delta T)\}_{n=0}^{M-1}$ の結果を示そう． $M_o = 1.65 \times 10^{18}$N・m, f_c = 0.29Hz, f_{max} = 32Hz としている．**図 5.8（a）**と（**b**）は，ω^{-3} モデルの震源 spectrum と $\{s(n\Delta T)\}_{n=0}^{M-1}$ である．$S(\omega)$ の分割数を M = 8192 とし，ΔT = 0.005s としている．

この方法は，震源時間関数の位相特性に対して強引な仮定を押しつけている．そもそも，因果性の概念の無い信号を振幅特性と位相特性に分けて，別々に規定すること自体に問題がある．当然のことながら, 次の段階として, 振幅特性と位相特性を同時に規定できる複素 cepstrum の領域で震源時間関数をモデル化する方向での作業が必要となろう．

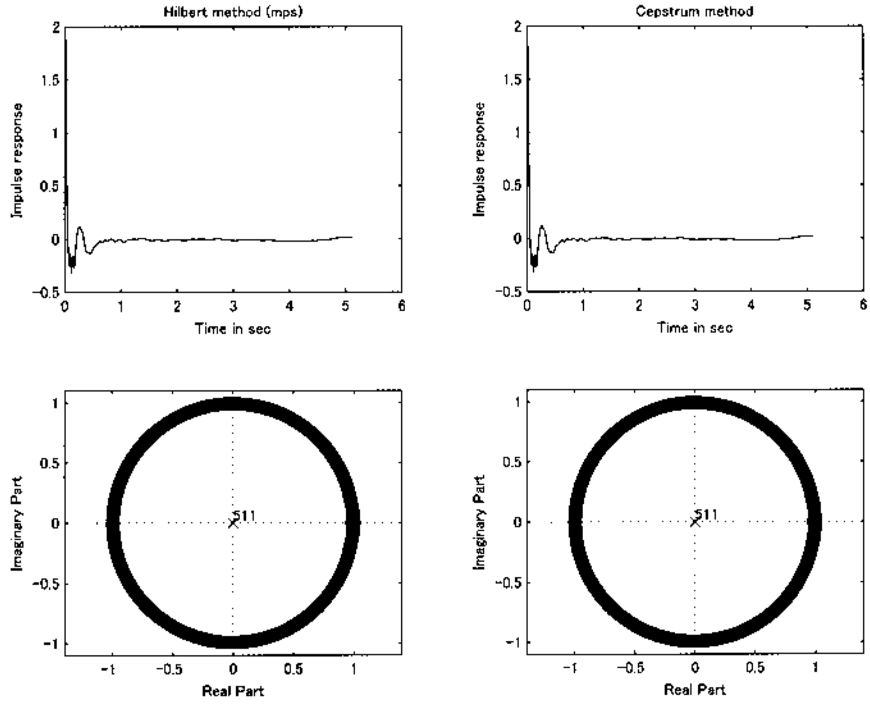

図 5.1　（上図）サイト効果のインパルス応答（下図）と極－零点配置図（左図はヒルベルト変換，右図はケプストラムによる方）

Fig. 5.1　(Top) Impulse responses of site effect filter and (bottom) pole/zero diagram (right).

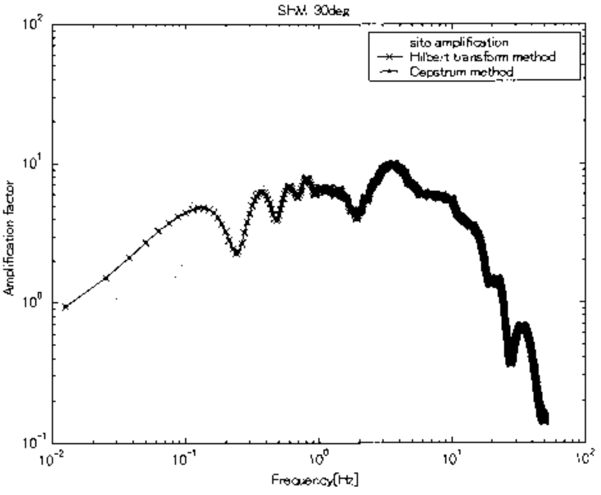

図 5.2　最小位相フィルタの振幅特性（標本化時間 0.01s）とサイト増幅特性（点線）

Fig. 5.2　Site amplification and magnitude responses of minimum-phase filter.

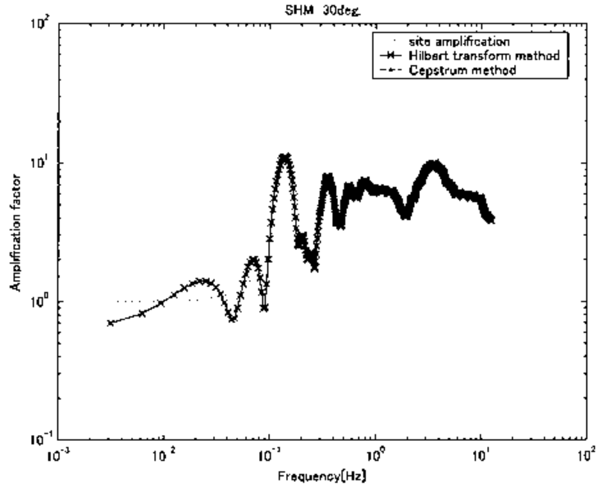

図 5.3　最小位相フィルタの振幅特性（標本化時間 0.04s）とサイト増幅特性（点線）

Fig. 5.3　Site amplification and magnitude responses of minimum-phase filter.

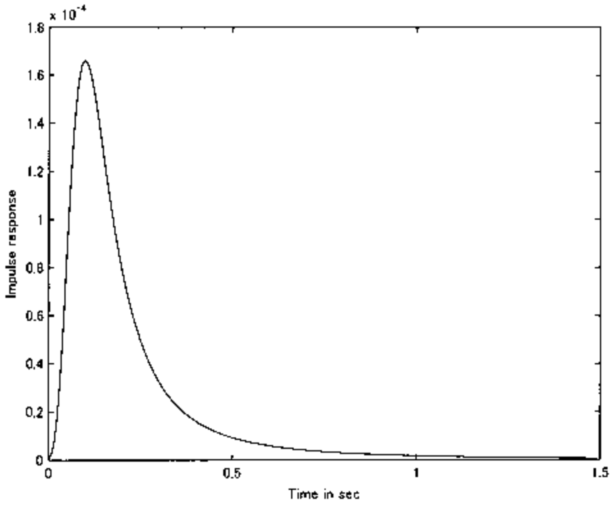

図 5.4　Q 値一定とした経路効果のインパルス応答

Fig. 5.4　Impulse response for path effect with a constant Q.

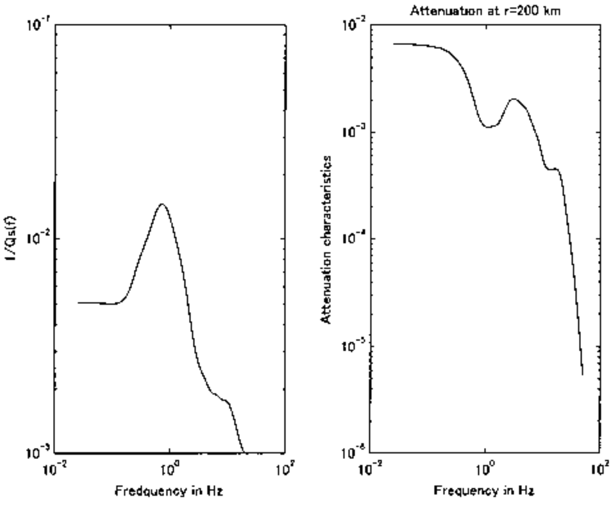

図 5.5　周波数依存型 Q（左図）と減衰特性（右図）

Fig. 5.5　Frequency-dependent Q (left) and amplitude attenuation (right).

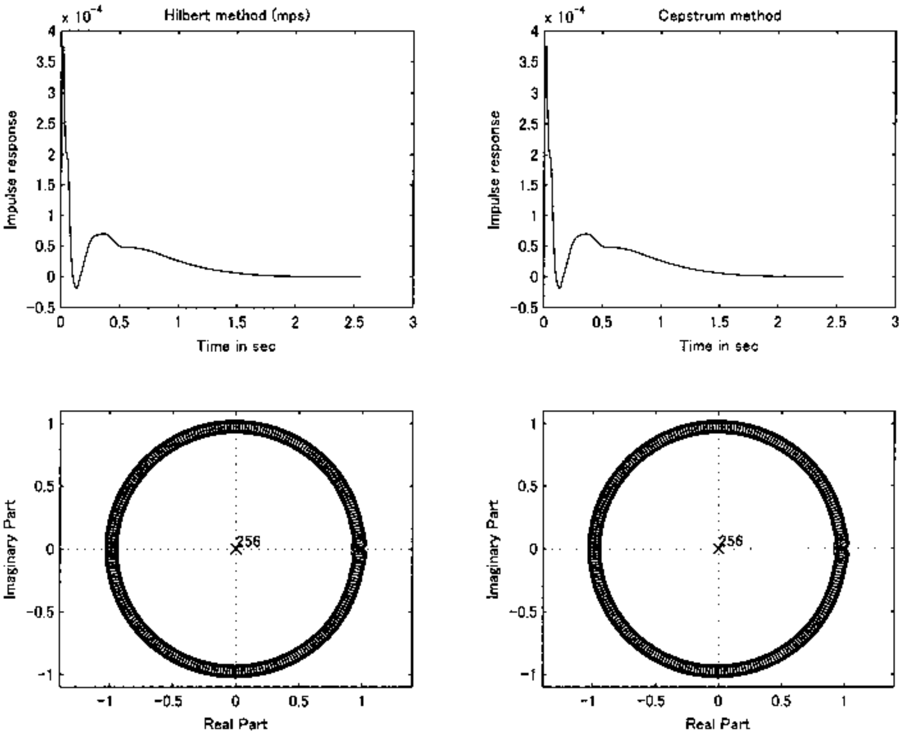

図 5.6　（上図）経路減衰効果のインパルス応答（下図）と極－零点配置図（左図はヒルベルト変換，右図はケプストラムによる）

Fig. 5.6　(Top) Impulse responses of path effect filter and (bottom) pole/zero diagram.

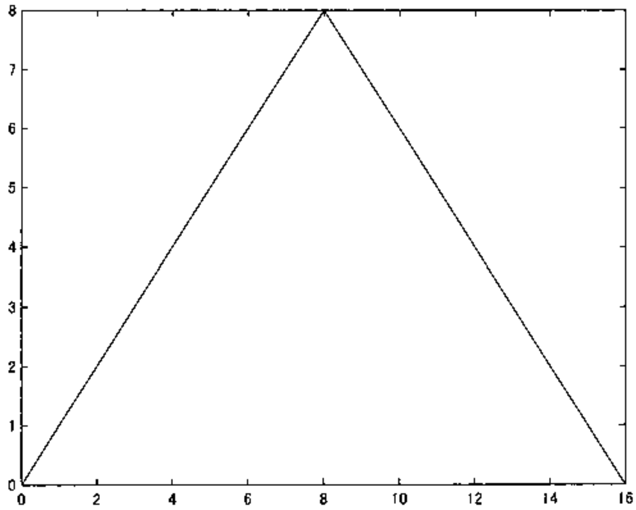

図 5.7 (a)　三角波型震源時間関数

Fig. 5.7 (a)　Impulse response for source time function.

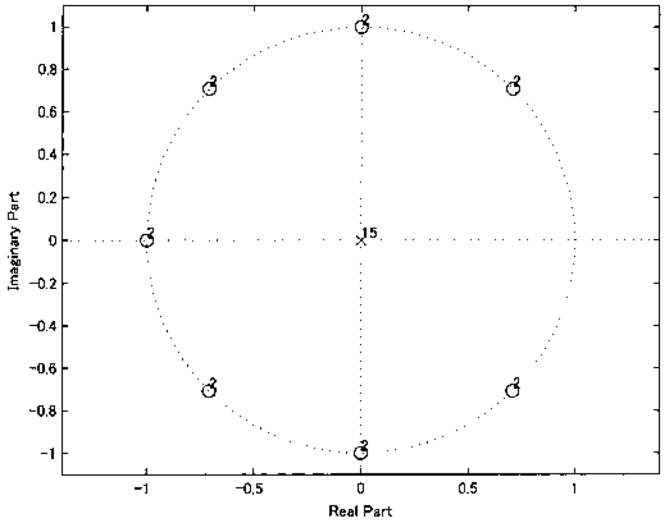

図 5.7 (b)　震源時間関数の極－零点配置図

Fig. 5.7 (b)　Pole/zero diagram of source time function.

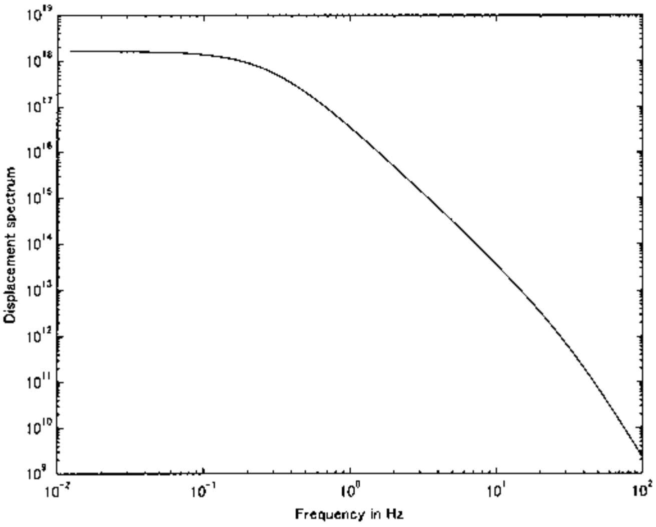

図 5.8 (a)　ω^{-3} 型の震源スペクトル
Fig. 5.8 (a)　ω^{-3} type source spectrum.

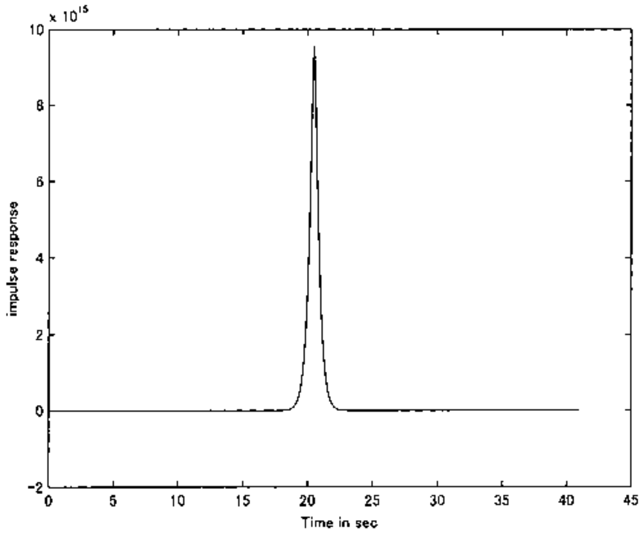

図 5.8 (b)　ω^{-3} 型の震源スペクトルから計算される震源時間関数
Fig. 5.8 (b)　Source time function for ω^{-3} type source spectrum.

6. Decimation filter - CS5376

FIR minumin-phase filter 設計問題の最後として，ここでは，実際の decimation filter について考えよう．連続信号を数値化する技術の主要部は，所謂 A/D 変換器であるが，計測用としての逐次比較型 A/D 変換器が，高価な 18 ビット型で行き止まり，安価な音響用が 24 ビット型へ移行するにつれて，この種の filter の出番が回ってきたと言うところであろう．Decimation filter は，所謂オーバサンプリング技術に基づく雑音の reduction に付随する digital filter である．詳細は数多くの教科書［例えば，Eynde and Sansen（1993)］が出ているので，ここでは省略するが，スペクトル領域で均一に拡がる雑音部分を，decimation filter を通過するたびに小さくすることにより，Σ-δ 型の A/D 変換器の分解能を向上させる仕事をする．

さて，decimation filter をどのような指針で設計するかは，ある程度一般的な話が出来る．最初に，**図 A.1** を用いて，これを説明しておこう．通常，decimation filter は，3 段構成で設計される．即ち，**図 A.1** の Filter#1，#2 及び #3 である．まず，Filter#1 の役割は，少しぐらいいい加減な仕様でよいから，数多くのデータを扱うため，演算速度が速いこと（高速 decimation）と，帯域外のノイズを間違いなく除去すること（anti-aliasing）である．Filter#1 の入力は，生の bit-stream 信号であるから，標本化周波数がかなり高いと見なければならない．従って，なるべく簡単な filter で，演算速度が速い低次の FIR filter が要請される．低次の sinc filter や移動平均 filter の様な単純な filter で Filter#1 は充分まかなえる．但し，阻止帯域のノイズを充分除去出来ねばならない．以下に述べる sinc filter 等は，この様な Filter#1 の条件を満たす filter である．Filter#2 は，通常 2 段構成となる．Filter#2 の初段は，Filter#1 で生じた歪みを equalize し，帯域外の信号を除去する anti-aliasing filter の役目を担うものである．Filter#2 の後段は，decimation filter の心臓部であり，S/N が充分大きいことと（ダイナミック・レンジが大きいことと），遷移帯域が充分小さいことが要求される．但し，この段階での標本化周波数は，未だ，高いため，通常は FIR 型の filter で設計される．最終段の Filter#3 は，特性の整形を目指すものであり，この段階では，標本化周波数も低くなっているため，IIR 型の filter が適している．

実際の例をクリスタル・セミコンダクタ社の CS3576 型 filter について見てみよう．この decimation filter は，地球物理学やソナーへの応用を目的として開発された 4 次の Σ-δ 変調器 CS5371 や CS5372 に後続する decimation filter である（1 チャンネル型 CS5371 と 2 チャンネル型 CS5372 の組み合わせによる最大 4 チャンネル分を 1 個の CS3576 で対応する）．CS5376 は，**図 A.2** で示すように，4 段構成となっており，初段は低次の Sinc filter の chain であり，ハードウエアで構成されている．即ち，**図 A.1** の Filter#1 に相当する．2 段目と 3 段目が FIR filter であり，これが，**図 A.1** の Filter#2 に相当する．最終段が，最高次数 3 の IIR filter となっている．即ち，**図 A.1** の Filter#3 である．まず，初段を構成する Sinc filter の chain は，**図 A.1** に示すように，5 通りの組み合わせ（5stage 構成）が可能であり，decimation ratio を 16 ～ 128 の間で調整できる．この chain を構成する個々の Sinc filter は，2. で説明したように，$(1+z^{-1})^n, n=4,5,6$ からなっている．当然のことながら，全ての極が原点にあり，零点は -1 の位置にある．従って，安定で因果性を有するが，linear-phase filter となっており，chain の中身をどのように構成しても零点が単位円上にあり，厳格な意味での minimum-phase filter とはならない．但し，Sinc1 の filter のみが大きな decimation ratio を持ち（filter の長さより，decimation の間隔が大きいので），等価的に minimum-phase filter として扱える．唯一の救いは，個々の Sinc filter の次数が，$n=4,5,6$ の様に小さいことであり，例えば，chain の中の Sinc1 の filter と Sinc2 の stage5 filter をカスケードに連結して用いるような場合，実用的に群遅延がわずかに存在する minimum-phase filter と見なして差し障りなかろう．さて，2 段目以降の 2 つの FIR filter と IIR filter の係数は，PC からシリアル・ポートを通してアップデイトすることが出来る．即ち，次数制限（2 つの FIR filter の合計次数が 255 に制限されている）を除いて，殆ど拘束もなく digital filter - decimation filter - を任意に組み上げることが出来る．そこで，ここでは，**図 A.2** の 2 段目と 3 段目の FIR filter と最終段の IIR filter について考察しよう．特に，FIR 型の minimum-phase filter がどのように得られるかを重点的に述べよう．

2 段目の FIR filter（FIR1 filter）は，前段の Sinc filter chain が低域通過 filter とは言え，その通過帯域が平坦とならないことを補償するために設計された equalizer としての filter であり，anti-aliasing filter を兼ねるものである．よって，通過帯域内で遮断周波数側にバンプが発達する振幅特性を持つように設計されている．実際，製造元からデフォルトとして提供された振幅補償用 FIR がどのように設計されたかは何の情報も与えられていないので不明であるが，その周波数特性を見ると，かなり穏やかな補正である．即ち，補償用 filter の通過帯域に $(1+z^{-1})^{-2}$ の filter に近い特性を持たせているようである．勿論，$(1+z^{-1})^{-2}$ の filter に FIR 型の急峻な低域通過 filter（FIR1 の特性から見て，遮断周波数を Nyquist 周波数の 0.12 倍程度とする）を組み合わせれば，FIR1 filter に近いものが設計出来よう．但し，これも当然のことながら，$(1+z^{-1})^{-2}$ が単位円上に 2 重極を有するため，若干，単位円内へ移動させておく必要はある．このことからも判るように，通常，FIR1 filter の設計は，2 つの filter をカスケードに接続することにより行われる．即ち，比較的高次の anti-aliasing filter と比較的低次の（帯域内で 1 つのピークを有する）単峰性 filter とのカスケード接続である．いずれも，Matlab の gremez 或いは remez を用いて設計される．単峰性 filter の設計には，firlpnorm を用いることもある．或いは，少し邪道ではあるが，liner-phase filter の係数列を適当に減衰させ，minimum-phase filter に変換する段階で，その係数列を増大させ，filter の通過帯域にバンプを持たせることができる．しかしながら，ここでは，デ

フォルトとして与えられた linear-phase filter である FIR1 filter から同じ振幅特性を有する FIR 型 minimum-phase filter を設計する例のみを考察しよう．以下，これを行うプログラム FIR1.m について述べる．

```
% FIR1.m
% Construction of FIR1 minimum-phase filter
clear all

% Original FIR1 linear-phase filter
M=38; M2=M/2;
h1=[-3363 -12069 -27056 -43884 -36017 17858 128486
266726 321261 179350 -228950 -821735 -1280574 -1190828
-190214 1820850 4419986 6887230 8388607];
h([1:M2])=h1([1:M2]);
for k=1:M2
  h(M2+k)=h1(M2+1-k);
end

plot(h)
title('Impulse response of FIR1 linear-phase filter')
figure

zplane(h,1)
title('Zero-pole pattern of FIR1 linear-phase filter')
figure

N=4096;
w=linspace(0,pi,N);
s=freqz(h,1,w);
w1=w/pi;
plot(w1,20*log10(abs(s)));
title('linear-phase FIR filter [FIR1]');
xlabel('Frequency (Normalized by Nyquist freq.)');
ylabel('Magnitude in dB');
figure

%
norder=1024;   % norder must be a large number as
               % compared with M=38
               % to put all zero within the unit circle
for k=1:norder
  h(k)=0;
end

hn2=norder/2;
for k=1:M2
  h(hn2+k)=h1(M2-k+1);
  h(hn2-k+1)=h1(M2-k+1);
end

plot(h)
title('Modified impulse response of FIR1 linear-phase filter')
figure

% Construction of FIR1 minimum-phase filter
y=mps(fft(h));
hh=ifft(y);
hh=real(hh);

hhh([1:M])=hh([1:M]);
plot(hhh)
title('Impulse response of FIR1 minimum-phase filter')
figure

zplane(hhh,1);
title('Zero-pole pattern of FIR1 minimum-phase filter')
figure

s1=freqz(hhh,1,w);
plot(w1,20*log10(abs(s1)));
title('FIR mimimum-phase filter [FIR1]');
xlabel('Frequency (Normalized by Nyquist freq.)');
ylabel('Magnitude in dB');

% End of program
```

FIR1.m のプログラムでは，最初に，デフォルトとして与えられた linear-phase filter の特徴を図示する．即ち，**図 6.1** に linear-phase filter の係数（インパルス応答）を示し，その極－零点配置を，**図 6.2** として示す．単位円外の零点は，単位円に対して相反な位置に零点を有し，linear-phase filter の特徴を示している．**図 6.3** は，この linear-phase filter の振幅特性である．

この FIR1.m の後半部分は，**図 6.3** で示される linear-phase filter と同じ振幅特性を有する minimum-phase filter を求めるものである．linear-phase filter から minimum-phase filter を求める方法は，これまで述べたように，いろいろとあるが，ここでは，Hilbert 変換に基づく方法を用いてみよう．得られた minimum-phase filter のインパルス応答（filter の係数）が，**図 6.4** となる．当然の事ながら，**図 6.4** に示す minimum-phase filter の極－零点配置は，**図 6.5** となる．即ち，**図 6.2** の様に単位円外にあった零点が，**図 6.5** では見あたらないことに気がつこう．**図 6.6** は，得られた minimum-phase filter の振幅特性である．**図 6.3** の振幅特性をフォローしているのが判ろう．このプログラムでは，Hilbert 変換を計算する前に，linear-phase filter の係数長（norder のこと）を大きくしていることに気がつこう．これにより，途中で係数列をうち切って得られる minimum-phase filter の単位円上にある零点の位置が単位円内に移動するように調整している．

次に，3 段目の FIR 型 digital filter（FIR2）について考えよう．用いるプログラムは，以下の FIR2.m である．この図の前半は，デフォルトとして与えられて

いる linear-phase filter の図示である．まず，**図 6.7** に linear-phase filter の係数（インパルス応答）を図示し，**図 6.8** に極－零点配置を示している．また，振幅特性は，**図 6.9** で与えられる．Nyquist 周波数の 95 % を遮断周波数とし，阻止帯域で 130dB の減衰特性を有している（実際，decimation ratio を 2 とすると，1kHz の標本化周波数において，450Hz が遮断周波数となり，500Hz から阻止帯域にはいる）．通過帯域のリップルは，**図 6.10** に示すものであり，地震波の A/D 変換用としては，いささか大きなリップルとなっている．

FIR2.m の後半では，この linear-phase filter に対応する minimum-phase filter を，Hilbert 変換を用いる方法で求めている．その結果，**図 6.11** の様なインパルス応答（FIR 係数）を持つ低域通過型 filter となる．この FIR 型 minimum-phase filter の極－零点配置は，**図 6.12** となり，零点は単位円内に存在する．また，振幅特性を，**図 6.13** に，その通過帯域でのリップルを**図 6.14** に示す．この filter の群遅延特性（group delay characteristics）は，**図 6.15** となり，通過帯域での挙動は**図 6.16** となる．

```
% FIR2.m
% Construction FIR2 minimum-phase filter dorresponding to
% the original linear-phase filter
clear all

M=126; M2=M/2;
h1=[-71 -371 -870 -986 34 1786 2291 291 -2036 -943 2985
3784 -1458 -5808 -1007 7756 5935 -7135 -11691 3531 17500
4388 -20661 -15960 18930 29808 -9795 -42573 -7745 49994
33021 -47092 -62651 29702 90744 4436 -109189 -54172
109009 114154 -81993 -174452 22850 221211 68863 -238025
-187141 208018 318763 -116005 -443272 -49958 533334
298975 -553873 -642475 454990 1113788 -137179 -1854336
-766230 3875315 8388607];
h([1:M2])=h1([1:M2]);
for k=1:M2
    h(M2+k)=h1(M2+1-k);
end

plot(h)
title('Impulse response of original FIR2 linear-phase filter')
figure

zplane(h,1)
title('Zero-pole pattern of original FIR2 linear-phase filter')
figure

N=4096;
w=linspace(0,pi,N);
s=freqz(h,1,w);
w1=w/pi;
plot(w1,20*log10(abs(s)));
title('Original FIR linear-phase filter [FIR2]');
xlabel('Frequency normalized by Nyquist freq.');
ylabel('Magnitude in dB');
figure

% Construction of FIR2 minimum-phase filter
norder=1024;  % norder must be a large number as compared
              % with M to put all zeros within the unit circle
for k=1:norder
    h(k)=0;
end
hn2=norder/2;
for k=1:M2
    h(hn2+k)=h1(M2-k+1);
    h(hn2-k+1)=h1(M2-k+1);
end
plot(h)
title('Modified impulse response of FIR2 linear-phase filter')
figure

y=mps135(fft(h));
hh=ifft(y);
hh=real(hh);
hhh([1:M])=hh([1:M]);
plot(hhh)
title('Impulse response of FIR2 minimum-phase filter')
figure

zplane(hhh,1);
title('Zero-pole pattern of FIR2 minimum-phase filter')
figure

s1=freqz(hhh,1,w);
plot(w1,20*log10(abs(s1)));
title('FIR2 mimimum-phase filter [FIR2]');
xlabel('Frequency normalized by Nyquist freq.');
ylabel('Magnitude in dB');
figure

Gd=grpdelay(hhh,1,w);
plot(w1,Gd)
xlabel('Frequency normalized by Nyquist freq.');
ylabel('Groupdelay [samples]');

% End of program
```

さて，より小さな遮断周波数を有する FIR 型 minimum-phase filter を求めてみよう．プログラム mFIR2.m である．このプログラムは，最初，linear-phase filter を mini-max 法で設計する．ここでは，Nyquist 周波数の 5 % を遮断周波数とし，20 % から阻止帯域が始まる，減衰量 130dB 以上の filter を設計しよう．はじめ

に，Matlab にある，一般化された min-max 法を用いて，**図 6.17** にインパルス応答（filter の係数）示す linear-phase filter を設計する．この極－零点配置は，**図 6.18** となる．振幅特性は，**図 6.19** で与えられる．

プログラムの後半は，**図 6.19** と同じ振幅特性有する minimum-phase filter の設計である．これまでと同じ方法（Hilbert 変換による方法）を用いて，minimum-phase filter を求めると，そのインパルス応答が，**図 6.20** となり，極－零点配置が，**図 6.21** で与えられる．全ての極と零点は単位円外に存在せず，minimum-phase 特性となることが判ろう．この filter の振幅特性は，**図 6.22** となり，通過帯域でのリップルは，**図 6.23** が示すように十分小さな値に抑えられているのが判ろう．CS3576 では，FIR1 と FIR2 の次数の合計が 255 以下に制限されるが，**図 6.4** の FIR1 filter と**図 6.20** の FIR2 filter の次数は，この制約を満たすように設計されている．

```
% mFIR2.m
% Program for the designing the minimum-phase FIR2 filter
% for the CS5376 decimation filter
clear all

% Setting of original linear-phase filter
% Design of FIR2 linear-phase filter by generalized
% minim-max method
FIRorder=132;
% Filter order
[b,err,res]=gremez(FIRorder,[0 0.05 0.2 1],[1 1 0 0],[1000
1]);
% at 1kHz sampling where Nyquist freq. is 500Hz
% Pass band is 0-25Hz
% Stop band is 100-500Hz
% don't care band is 25-100Hz

% Plotting of filter coefficients which is equivalent to
% the impulse response of FIR2 filter
plot(b)
title('Impulse response of linear-phase filter')
figure

% Plotting of the gain of FIR2 linear-phase filter
N=2048;
w=linspace(0,pi,N);
h=freqz(b,1,w);
w1=w/pi;
plot(w1,20*log10(abs(h)));
title('linear-phase FIR filter [FIR2]');
xlabel('Frequency (Normalized by Nyquist freq.)');
ylabel('Magnitude in dB');
figure

zplane(b,1)
title('Zero-pole pattern of linear-phase filter')
figure


% Construction of minimum-phase filter
% Zero pading for the calculation of Hilbert transform
% Large length of impulse response
for k=FIRorder+1:1024
  b(k)=0;
end

y=mps140(fft(b));
hh=ifft(y);
hh=real(hh);

N2=FIRorder;
hhh([1:N2])=hh([1:N2]);
plot(hhh)
title('Impulse response of FIR2 minimum-phase filter')
figure

zplane(hhh,1);
title('Zero-pole pattern of FIR2 minimum-phase filter')
figure

s1=freqz(hhh,1,w);
plot(w1,20*log10(abs(s1)));
title('mimimum-phase FIR filter [FIR2]');
xlabel('Frequency (Normalized by Nyquist freq.)');
ylabel('Magnitude in dB');

% End of program
```

さて，FIR1.m と FIR2.m に関する幾つかの注意点を述べておこう．最初は，現実的な問題として，decimation filter CS3576 に filter 係数をアップロードするときの注意である．CS3576 の評価ボードでは，FIR1.m と FIR2.m のプログラムの最初に示す filter 係数がデフォルト値として与えられている．従って，デフォルトの filter の振幅特性の直流値が一致するように FIR1.m と FIR2.m で求めた minimum-phase filter の係数をスケーリングしてアップロードする必要がある．アップロードは，filter の係数を 16 進数に変換し，シリアル・ポートを通して PC から行うことが出来る．次に，FIR1.m や FIR2.m で用いた mps.m 及び mps135.m を以下の function 文で示す．これは Web 上で公開されているプログラム（Smith, 2003）に基づくものであり，阻止帯域にクリップ・レベルを指定できる便利なものである．

```
% mps.m

function [H]=mps(H1)
```

```
h1=ifft(log(clipdb(H1,-100)));
HH=fft(fold(h1));
H=exp(HH);

% End of program
```

```
% mps135.m

function [H]=mps135(H1)
h1=ifft(log(clipdb(H1,-135)));
HH=fft(fold(h1));
H=exp(HH);

% End of program
```

最後に，CS3576 decimation filter の最終段である 3 次の IIR filter の設計法を述べよう．この filter は，デフォルトとして，高域通過 filter が与えられているが，ここでは低域通過 filter に変換してみよう．即ち，1 次の Butterworth filter と 2 次の Butterworth filter のカスケード接続から低域通過 filter を構成しよう．Nyquist 周波数の 6% を遮断周波数とするものである．

プログラム IIRfilters.m では，Matlab のコマンド butter を用いて Butterworth filter を設計しているが，零点の配置について一つの細工をしている．これは，filter の極に関しては，これらが容易に単位円内に入るため問題はないが，零点はほぼ単位円上に存在するためである．

```
% IIRfilters.m

% IIR filters for the CS5376 decimation filter
ascal=8388607;

% IIR Butterworth filter
% Filter B(z)/A(z)
% Lowpass filter with a cuttoff frequency of 30Hz
% Butterworth filters
[b3,a3]=butter(1,30/500);
[b4,a4]=butter(2,30/500);

% Rearrangement of zeros
z3=roots(b3)*0.998;
z4=roots(b4)*0.998;
b3=poly(z3);
b4=poly(z4);

% Normalized coefficients of IIR filters
b3=ascal*b3; a3=ascal*a3;
b4=ascal*b4/2; a4=ascal*a4/2;

% Gain normalization
% 0dB at DC
[gain3,freq1]=freqz(b3,a3,4096);
scale3=1/abs(gain3(1));
b3=b3*scale3;

[gain4,freq1]=freqz(b4,a4,4096);
scale4=1/abs(gain4(1));
b4=b4*scale4;

% Pole/zero diagram
zplane(b3,a3)
title('Zer-pole pattern of IIR1 filter')
figure

zplane(b4,a4)
title('Zero-pole pattern of IIR2 filter')
figure

[h3,t3]=impz(b3,a3);
gain_plot(h3,4096,'1st order IIR')
figure

[h4,t4]=impz(b4,a4);
gain_plot(h4,4096,'2nd order IIR')

% End of program
```

プログラムでは，実軸上に現れる単位円上の零点を 0.2 % だけ単位円内に強制的に移動させて，filter を求めている．この様にして得られた 1 次及び 2 次の低域通過型 Butterworth filter の特性が，**図 6.24** と**図 6.25**，及び，**図 6.26** と**図 6.27** に，各々，示されている．**図 6.24** と**図 6.26** が極－零点配置図であり，全ての極と零点が単位円内に存在する minimum-phase filter となっている．また，2 つの filter の振幅特性が，**図 6.25** と**図 6.27** である．

なお，1 次の IIR filter と後続する 2 次の IIR filter の filter 係数を PC のシリアル・ポートからアップロードするとき，16 進数に変換して転送するのは FIR filter の場合と同じであるが，1 次の IIR では，係数の最大値を 1 に正規化し，2 次の IIR では係数の最大値を 2 に正規化して転送する様に指示されているので注意しておこう．

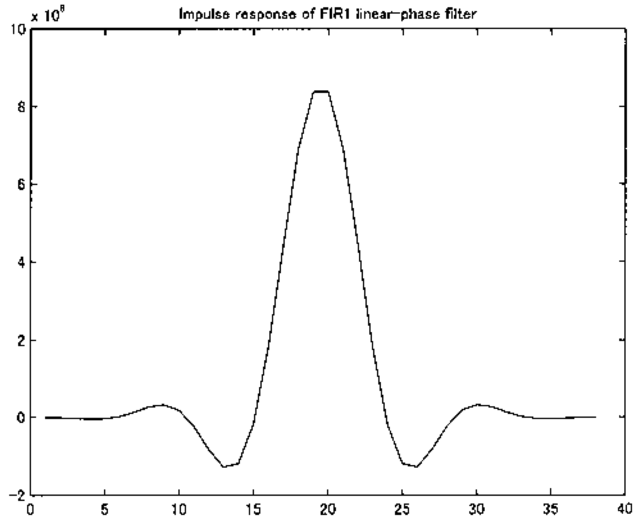

図 6.1　FIR1 線形位相フィルタのインパルス応答
Fig. 6.1　Impulse response of FIR1 linear-phase filter.

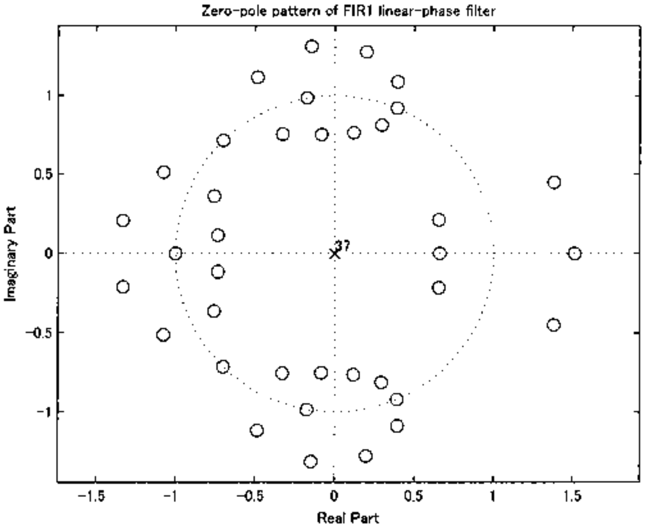

図 6.2　FIR1 線形位相フィルタの極－零点配置図
Fig. 6.2　Pole/zero diagram for FIR1 linear-phase filter.

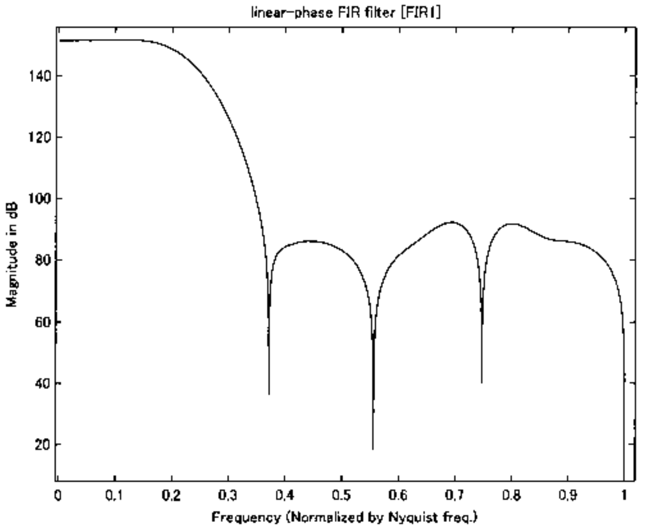

図 6.3　**図 6.1** のインパルス応答を有する FIR1 線形位相フィルタの振幅特性
Fig. 6.3　Magnitude response of FIR1 linear-phase filter.

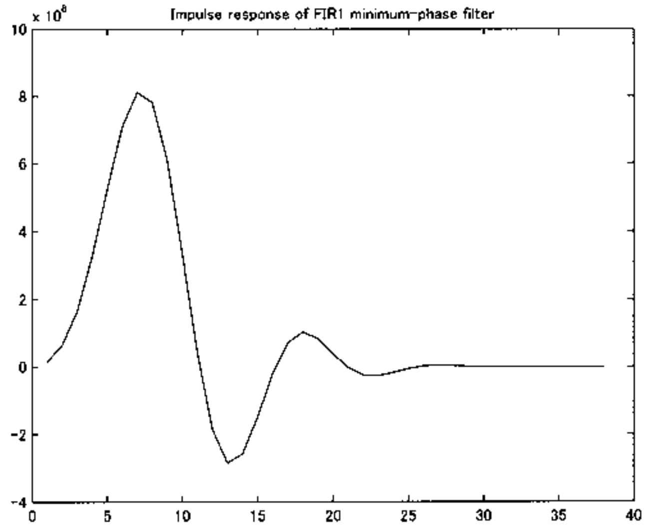

図 6.4　FIR1 最小位相フィルタのインパルス応答

Fig. 6.4　Impulse response FIR1 minimum-phase filter.

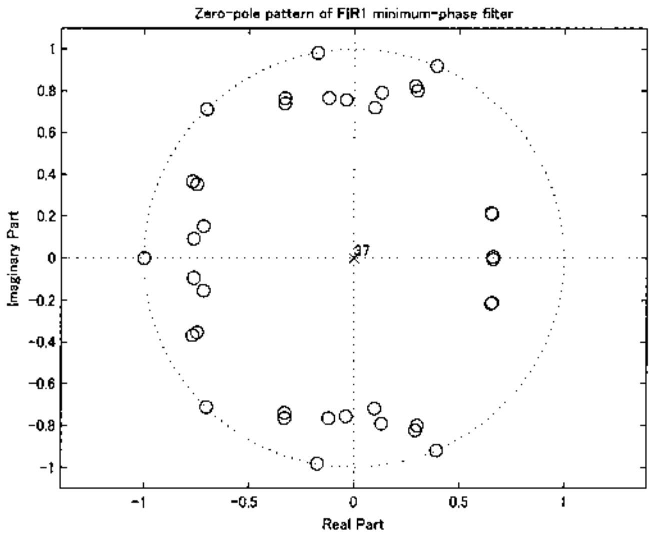

図 6.5　FIR1 最小位相フィルタの極－零点配置図

Fig. 6.5　Pole/zero diagram of FIR1 minimum-phase filter.

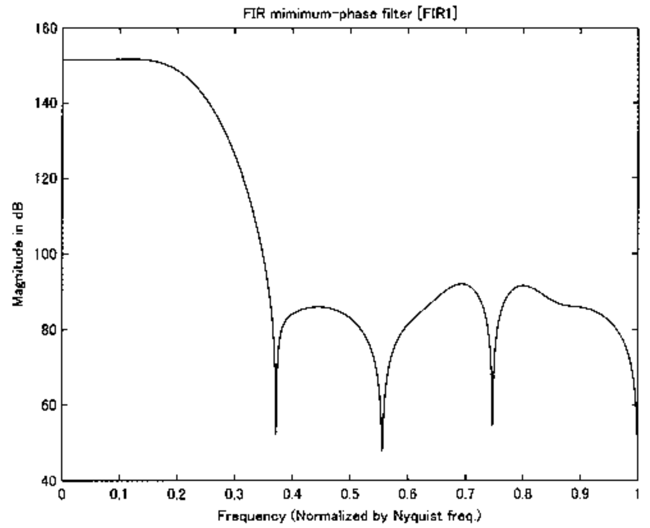

図 6.6　**図 6.4** のインパルス応答を有する FIR1 最小位相フィルタの振幅特性

Fig. 6.6　Magnitude response of FIR1 minimum-phase filter.

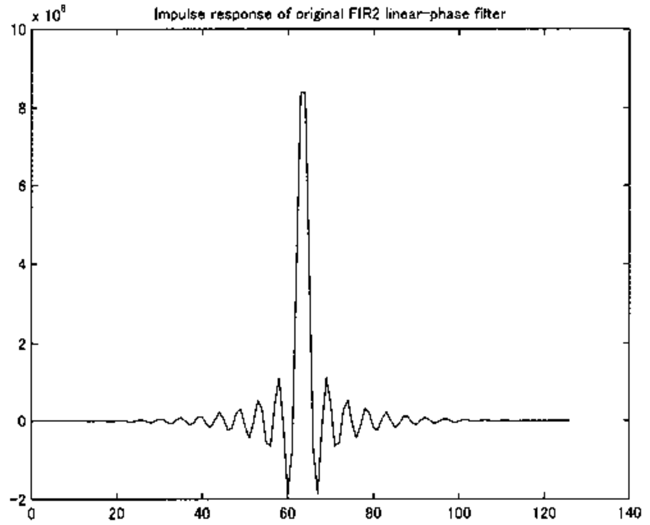

図 6.7　FIR2 線形位相フィルタのインパルス応答

Fig. 6.7　Impulse response of FIR2 linear-phase filter.

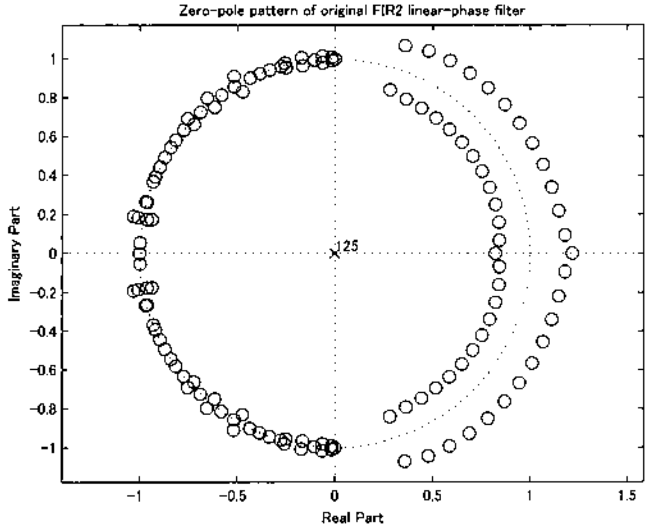

図 6.8　FIR2 線形位相フィルタの極－零点配置図

Fig. 6.8　Pole/zero diagram of FIR2 linear-phase filter.

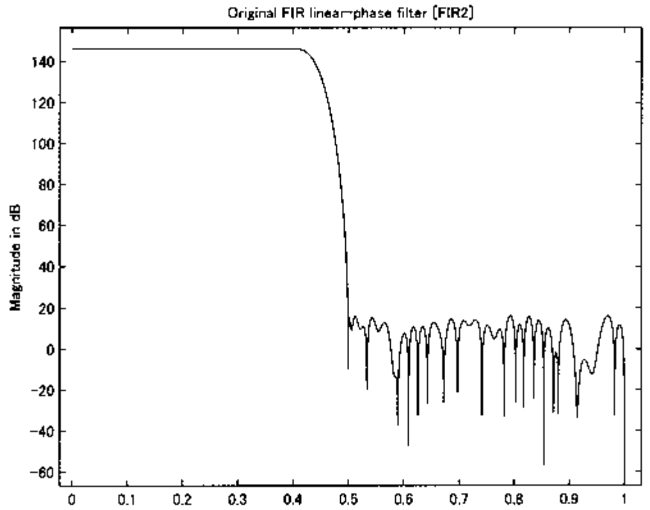

図 6.9　図 6.7 のインパルス応答を有する FIR2 線形位相フィルタの振幅特性

Fig. 6.9　Magnitude response of FIR2 linear-phase filter.

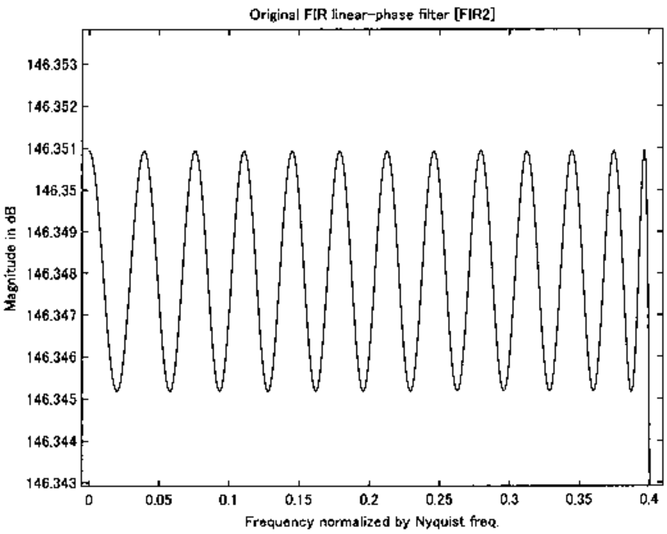

図 6.10　**図 6.9** に示す振幅特性の詳細通過帯域
Fig. 6.10　Pass-band detail of magnitude response shown in **Fig.6.9**.

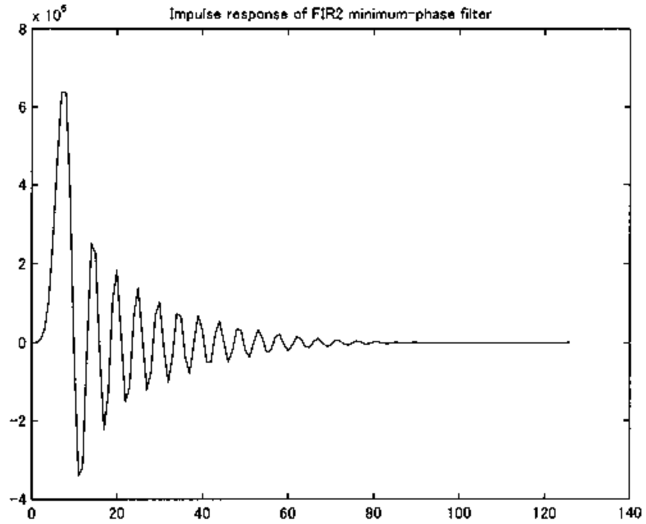

図 6.11　FIR2 線形位相フィルタの極 - 零点配置図
Fig. 6.11　Impulse response of FIR2 minimum-phase filter.

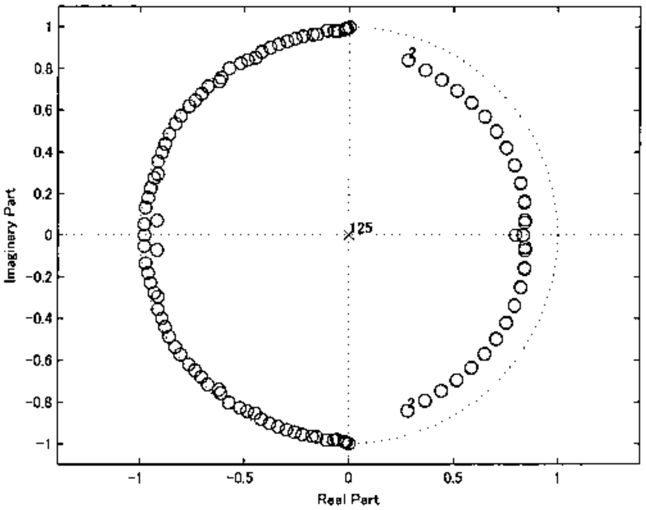

図 6.12　FIR2 最小位相フィルタの極 - 零点配置図
Fig. 6.12　Pole/zero diagram of FIR2 minimum-phase filter.

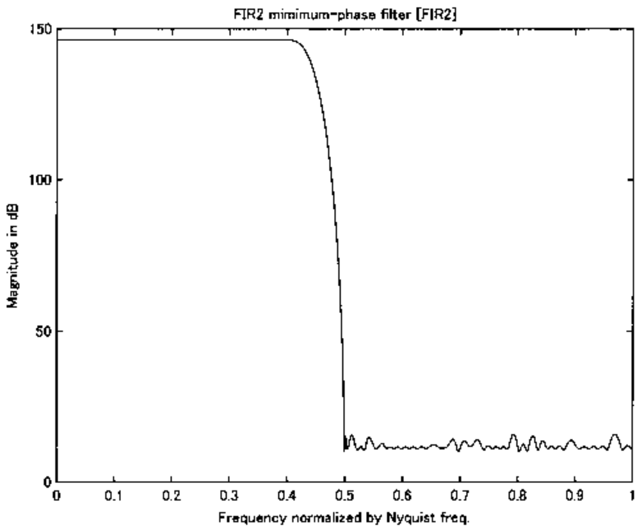

図 6.13　**図 6.11** のインパルス応答を有する FIR2 最小位相フィルタの振幅特性

Fig. 6.13　Magnitude response of FIR2 minimum-phase filter.

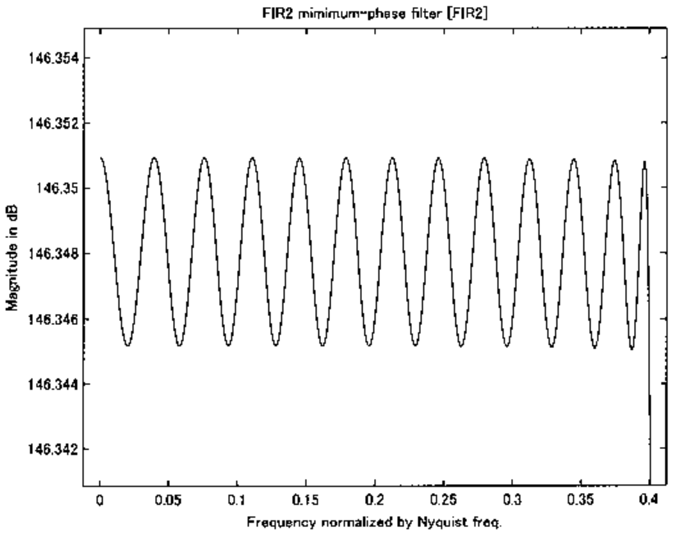

図 6.14　**図 6.11** に示す振幅特性の詳細通過帯域

Fig. 6.14　Pass-band detail of magnitude response shown in **Fig.6.11**.

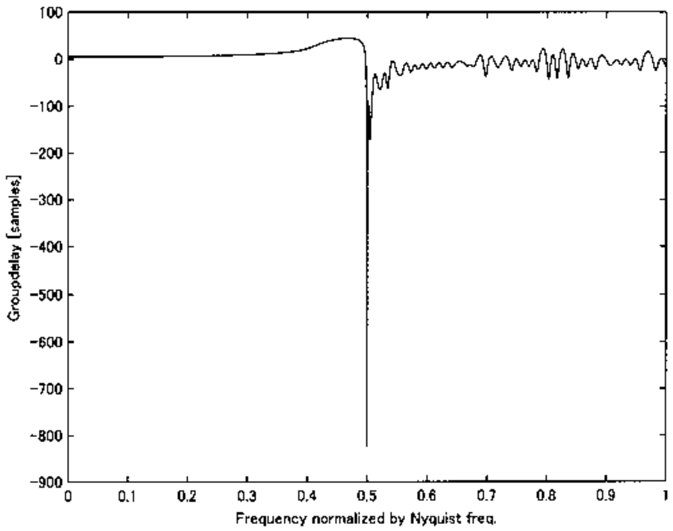

図 6.15　**図 6.7** のインパルス応答を有する線形位相フィルタの群遅延

Fig. 6.15　Group delay of linear-phase filter.

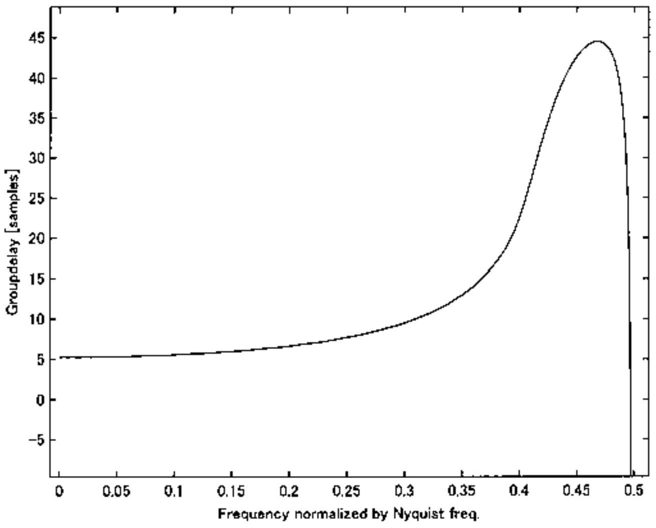

図 6.16　**図 6.11** のインパルス応答を有する最小位相フィルタの群遅延

Fig. 6.16　Group delay of minimum-phase filter.

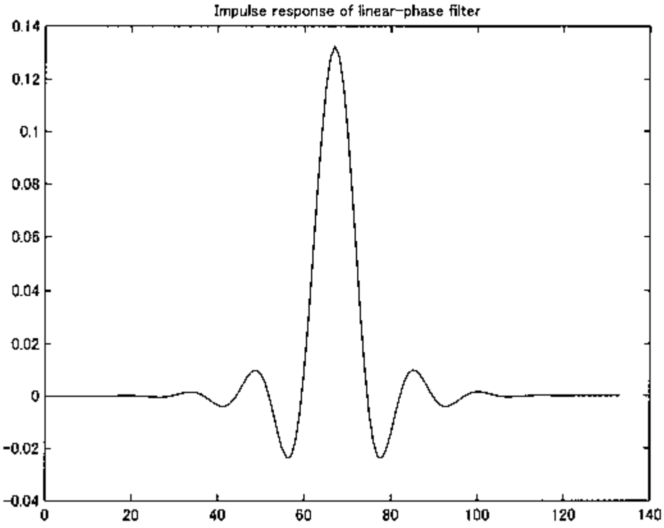

図 6.17　FIR2 線形位相フィルタのインパルス応答

Fig. 6.17　Impulse response of custom FIR2 linear-phase filter.

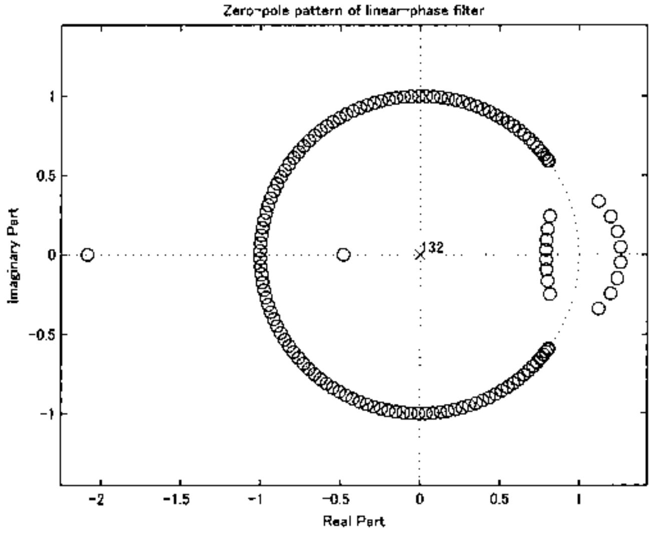

図 6.18　**図 6.17** のインパルス応答を有する FIR2 線形位相フィルタの極 − 零点配置図

Fig. 6.18　Pole/zero diagram of custom FIR2 linear-phase filter.

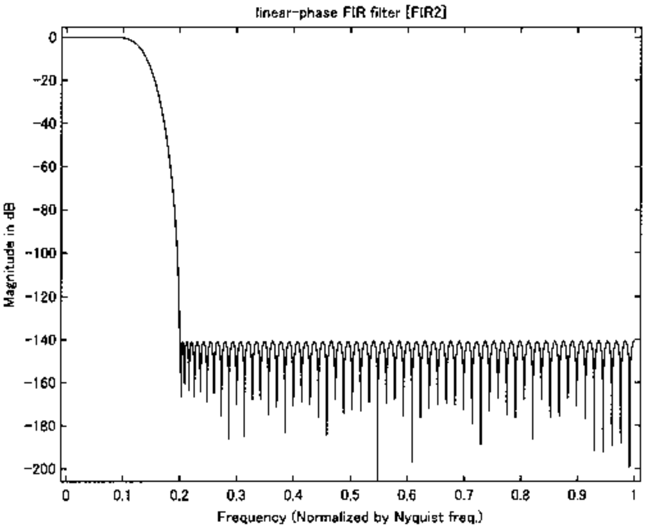

図 6.19　図 6.17 のインパルス応答を有する FIR2 線形位相フィルタの振幅特性

Fig. 6.19　Magnitude response of custom FIR2 linear-phase filter.

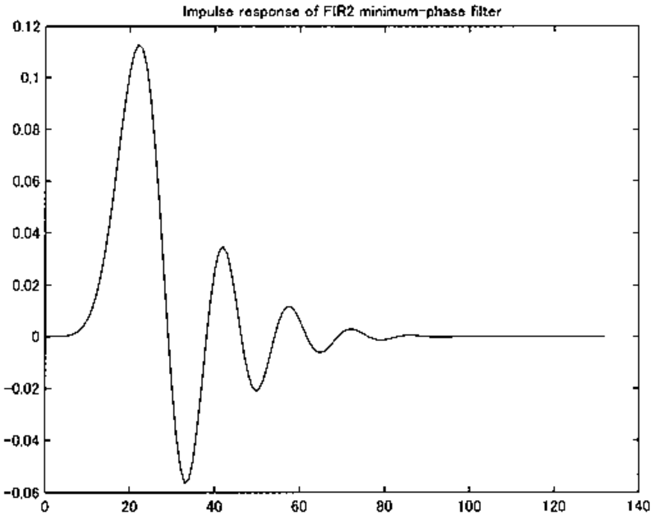

図 6.20　FIR2 最小位相フィルタのインパルス応答

Fig. 6.20　Impulse response of custom FIR2 minimum-phase filter.

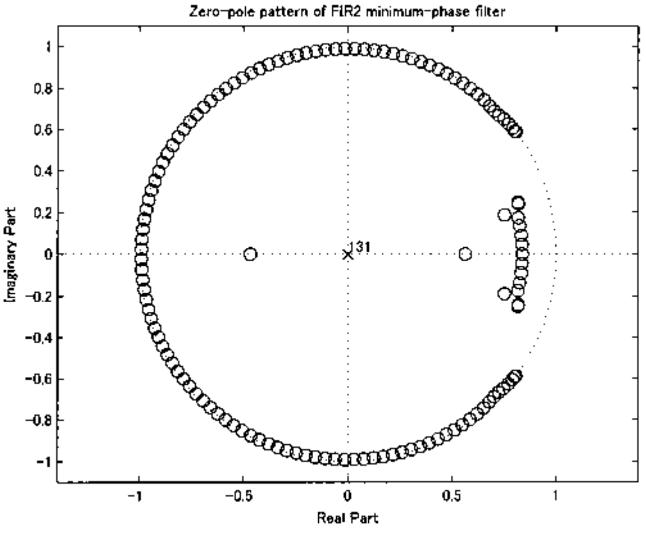

図 6.21　図 6.20 のインパルス応答を有する FIR2 最小位相フィルタの極－零点配置図

Fig. 6.21　Pole/zero diagram of custom FIR2 minimum-phase filter.

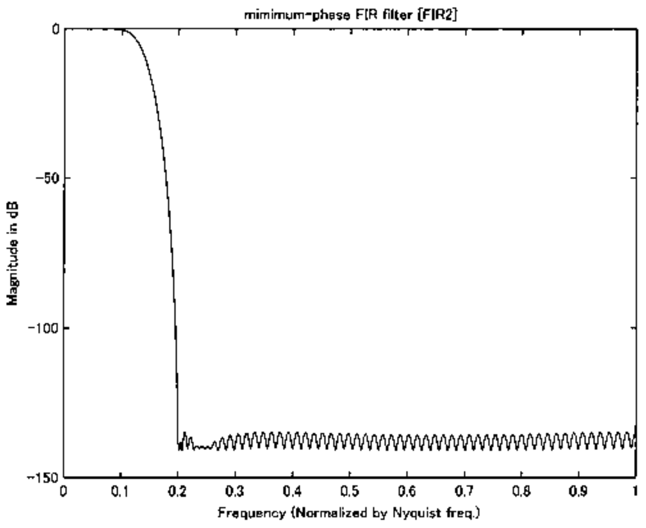

図 6.22 **図 6.20** のインパルス応答を有する FIR2 最小位相フィルタの振幅特性

Fig. 6.22 Magnitude response of custom FIR2 minimum-phase filter.

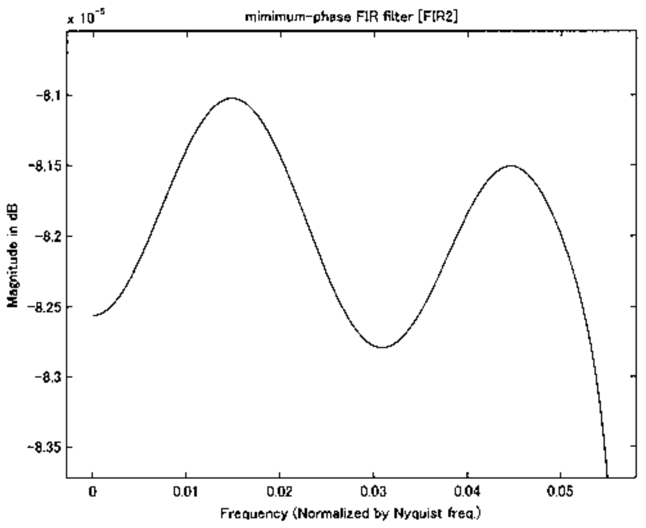

図 6.23 **図 6.21** に示された振幅特性の詳細通過帯域

Fig. 6.23 Pass-band detail of magnitude response shown in **Fig.6.21**.

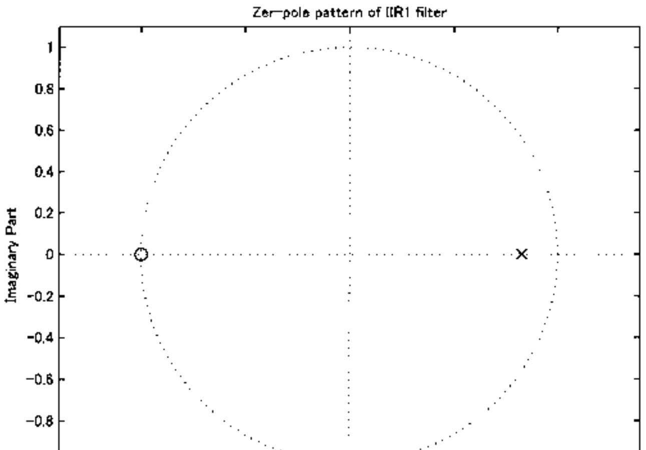

図 6.24 1 次 IIR 型バターワース低域通過フィルタの極－零点配置図

Fig. 6.24 Pole/zero diagram of first-order IIR Butterworth filter.

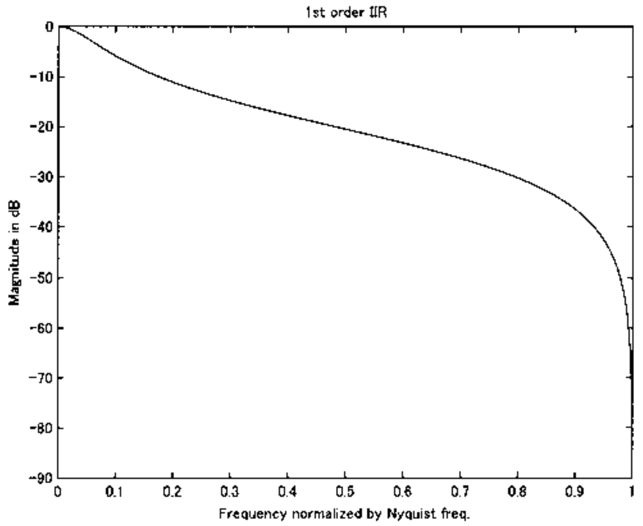

図 6.25　1 次 IIR 型バタワース低域通過フィルタの振幅特性

Fig. 6.25　Magnitude response of first-order IIR Butterworth filter.

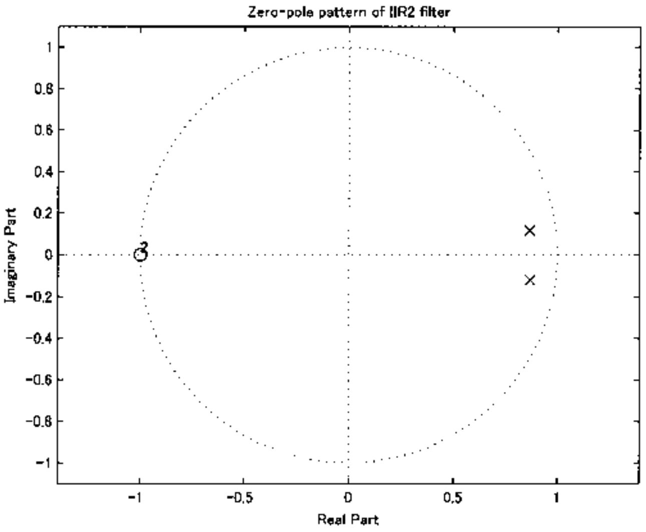

図 6.26　2 次 IIR 型バターワース低域通過フィルタの極－零点配置

Fig. 6.26　Pole/zero diagram of second-order IIR Butterworth filter.

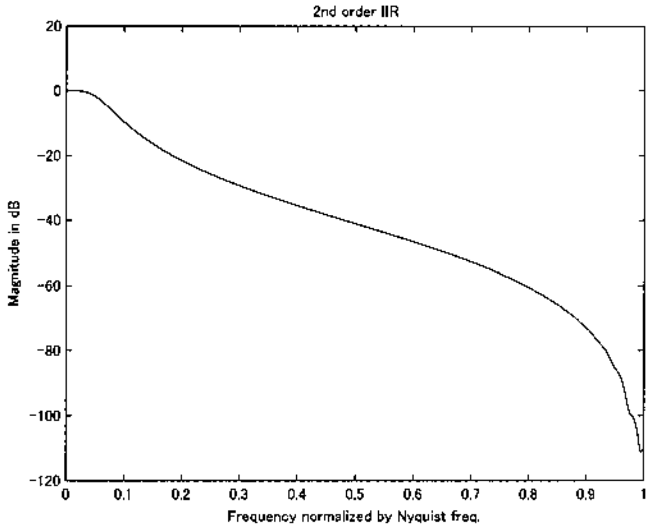

図 6.27　2 次 IIR 型バターワース低域通過フィルタの振幅特性

Fig. 6.27　Magnitude response of second-order IIR Butterworth filter.

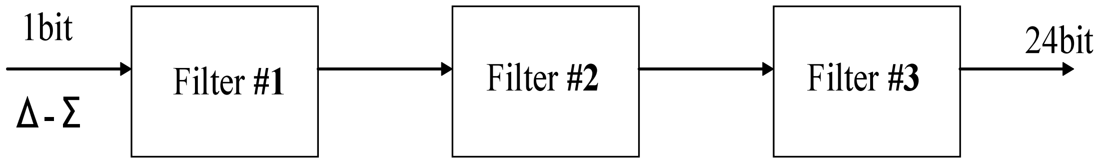

図 A.1　デシメーションフィルタの構成図
Fig. A.1　Overall filter block diagram of decimation filter.

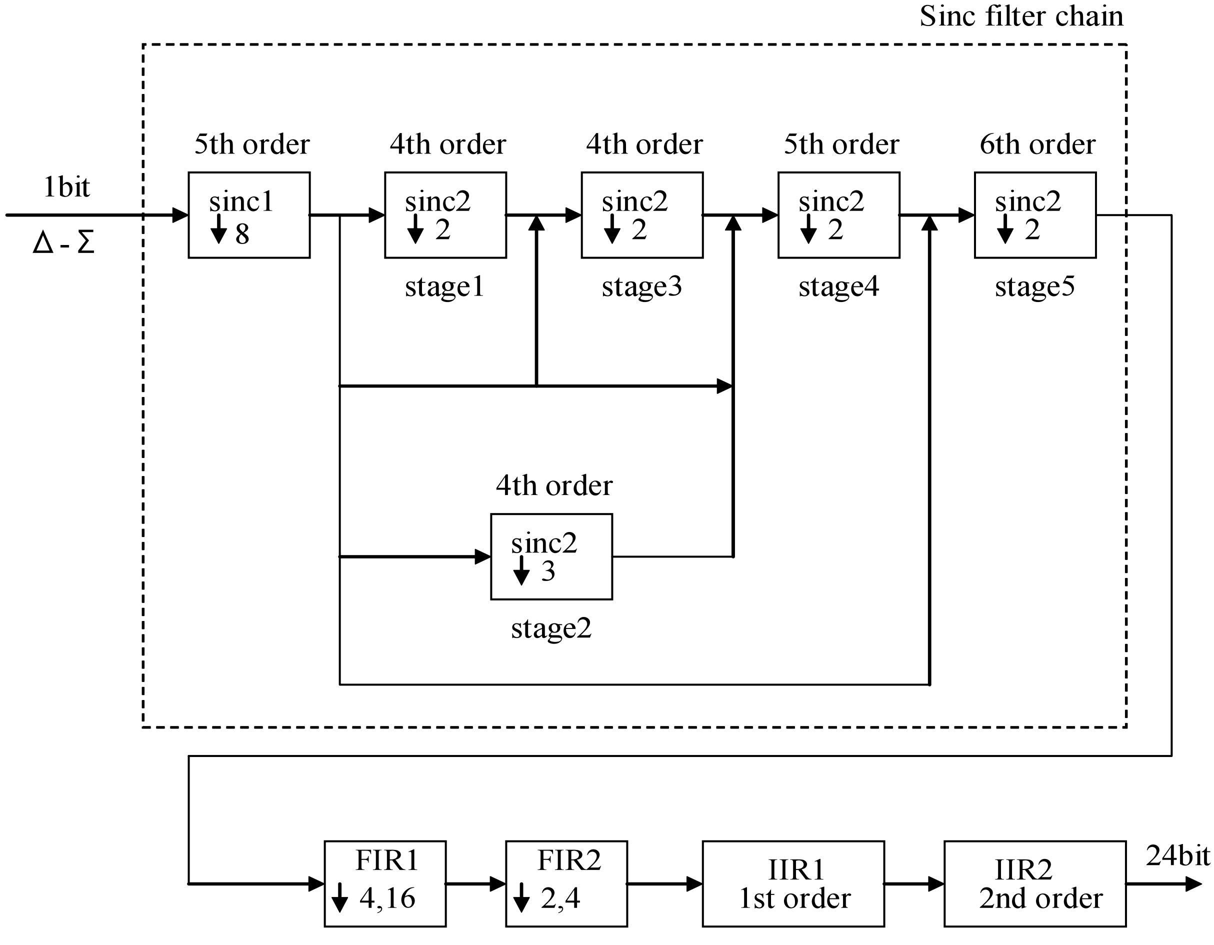

図 A.2　CS5376 のデシメーションフィルタ
Fig. A.2　Digital decimation filter of CS5376.

7. おわりに

本報告書では，FIR 型 minimum-phase filter の作り方と実際の応用例について述べた．On-the-job training を地でゆくような報告書であり，仕事に対する納期の設定が如何に難しいかを改めて考えざるを得なかった報告書である．特に，CS3576（A）decimation filter を用いた実験については，時間の関係でまとめきれなかった．これらは，Σ-δ modulator に関する報告書で記述できればと考える次第である．

なお，この報告書は，株式会社三菱スペース・ソフトウエアからの委託研究“地震波解析・処理用デジタル・フィルタの設計ソフトウエア”を土台にしている．本来ならば，もう少し上品な報告書になる予定であったが，かような報告書となってしまった次第である．無礼を謝するとともに，深く感謝の意を表する次第である．

参考文献

1) Aki, K. and Richards, P. G.（1980）: Quantitative Seismology. Theory and Methods, Vol.1, W. H. Freeman and company.

2) Azimi, S. A., Kalinin, A. V., Kalinin, V. V. and Pivovarov, B. L.（1968）: Impulse and transient characteristics of media with linear quadratic absorption laws. Izvestuya, Physics of the Solid Earth, February: 88-93.

3) Berkhout, A. J.（1973）: On the minimum-length property of one-sided signals. Geophysics, **38**, 4, 657-672.

4) Damera-Venkata, N., McCaslin, S. R. and Evans, B. L.（2000）: Design of optimal minimum phase digital FIR filters using discrete Hilbert transforms. IEEE Trans. Signal Processing, **48**, 5, 1491-1495.

5) Eynde, F. O. and Sansen, W.（1993）: Analog Interfaces for Digital Signal Processing Systems, Kluwer Academic Publishers.

6) Gian A. Mian, G. A. and Nainer, A. P.（1982）: A fast procedure to design equiripple minimum-phase FIR filter. IEEE Trans. Circuit and Systems, **CAS-29**, 5,327-331.

7) Goupillaud, P.（1961）: An approach to inverse filtering of near surface layer effects from seisic records. Geophysics, **26**, 754-760.

8) Herrmann, O. and Schuessler, W.（1970）: Design of non-recursive digital filters with minimum-phase. Electronics Letters, **6**, 11, 329-330.

9) Hogenauer, B. B.（1981）: An economical class of digital filter for decimation and interpolation. IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, 29, 2, 155-162.

10) Kinoshita, S.（1994）: Frequency-dependent attenuation of shear waves in the crust of the Kanto area, Japan. Bull. Seism. Soc. Am., **84**, 1387-1396.

11) 木下繁夫・上原正義・斗沢敏雄・和田安司・小久江洋輔（1997）: K-NET95型強震計の記録特性．地震，**49**, 467-482.

12) Kinoshita, S.（1999）: A stochastic method for investigating site effects by means of a borehole array - SH and Love waves. Bull. Seism. Soc. Am., **89**, 485-500.

13) 木下繁夫・大池美保（2002）: 関東地域の堆積層－基盤系におけるS波の減衰特性 - 0.5～16Hz-. 地震, **55**, 19-31.

14) Proakis, J. G. Proakis and Manolakis, D. G.（1996）: Digital Signal Processing, Prentice Hall.

15) Smith, J. O.（2003）: Introduction to Digital Filters. DRAFT of book in progress, http://www-ccrma.stanford.edu/~jos/filters/.

（原稿受理：2004 年 3 月 31 日）

付録 A

本文中で示した Matlab のプログラム，その他必要なプログラム，及び，演習用の地震記録等は，付録の CD-ROM に格納し，利用の便を図った．

付録 B

本報告の執筆中に，6. で扱った decimation filter CS5376 の改訂版 CS5376A が出され，古い評価ボードが製造中止となり，CS5376A を用いた新しい評価ボードが発売された．従って，6. は本来書き直さねばならないのであるが，新しい decimation filter が旧のものと本質的に異なる訳ではないので，必要な事項のみを付録 B として加筆することにした．新旧の decimation filter で明らかに異なるのは, sinc filter chain の部分であり, 新しい CS5376A では, 伝統的な Hognenauer（1981）の CIC（Cascaded Integration Com）filter を採用し，他のメーカが FPGA を用いて評価ボードに組み込んでいる decimation filter に似てきている．CIC decimation filter は,

$$H(z) = \left(\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right)^K$$

の z 変換型関数を持つ filter であり，ハードウエアの構成に定評のあるものであり，FPGA 用の VHDL プログラムも広く流布している．この decimation filter は，FIR 型に変換すると，証明は簡単なので略すが，新しい評価ボードに組み込まれているものは以下の様になる．

$$H(z) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \right)^K, \quad (N \ : \text{odd})$$
$$= \left[\prod_{n=0}^{M-1} (1 + z^{-2^n}) \right]^K, \quad (N = 2^M)$$

$N \geq 3$ の場合，6. で述べた従来の decimation filter（$N = 2$）の様に，遮断周波数が Nyquist 周波数と一致しないため，低周波数域の平坦さで優れている . 評価ボードでは，最初に $N \geq 3$ の filter を用い，その直後に $N = 2$ の filter を後続させるという組み合わせを繰り返して用いて，decimation と anti-aliasing filter としての効果を高めている．従って，新しい評価ボード上の sinc filter chain は少し複雑になっている．

要　旨

この小文は，地震波信号を処理する為のデジタル・フィルタを扱っている．地震記録の収録や得られた信号を処理する分野において，信号の因果性を保つため，最小位相フィルタは重要な役割を担っている．特に，線形位相フィルタを通して得られた地震波信号を最小位相信号に変換するため，最小位相フィルタが要求される．ここでは，最小位相フィルタを設計するための 2 つの方法，ヒルベルト変換に基づく方法とケプストラム技術に基づく方法，について説明し，Matlab でのプログラムを示した．また，最小位相フィルタの応用例として，地震動構成要素の中のサイト効果と経路減衰効果に等価な最小位相フィルタの設計とデシメーション・フィルタの設計について述べた．デシメーション・フィルタの設計については，実際に CS5376 型デシメーション・フィルタを扱った．

キーワード：デジタル・フィルタ，最小位相フィルタ，線形位相フィルタ，デシメーション，ヒルベルト変換，ケプストラム，サイト効果，経路減衰効果